



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

Artigos

Uma proposta de atividade desenvolvimental para o ensino de cônicas

Por: Duelci Aparecido de Freitas Vaz²

duelci.vaz@gmail.com

Brunna Brito Passarinho³

brunnabrito10@gmail.com.

Lygianne Batista Vieira⁴

-
- 2 É Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP, Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Goiás – UFG e Graduado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Goiás – PUC-GO. É servidor público federal, docente de Matemática EBTT do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – IFGO, na cidade de Goiânia. Atua nas Linhas de Pesquisa de História e Filosofia da Matemática, Metodologia do Ensino de Matemática, Tecnologias no Ensino de Matemática, História da Matemática e O uso da Tecnologia no Ensino-Aprendizagem de Matemática. É Coordenador do Projeto de Pesquisa As potencialidades pedagógicas das novas tecnologias no desenvolvimento matemático investigados no ponto de vista da Teoria Histórico-cultural; no Projeto de Pesquisa sobre Criação de um ambiente virtual de Ensino-aprendizagem de Matemática customizado para a Plataforma Moodle; no Projeto de Pesquisa sobre Ensinando e aprendendo Matemática com Geogebra e com Winplot; no Projeto de Pesquisa sobre Ensinando Geometria Analítica com o Geogebra; no Projeto de Pesquisa sobre Ensinando Geometria Analítica no terceiro ano do Ensino Médio com Geogebra; no Projeto de Pesquisa sobre Os três problemas Gregos; no Projeto de Pesquisa sobre Ensinando Geometria euclidiana com o Geogebra e do Projeto de Pesquisa sobre Ensinando Funções com o Geogebra. É autor de artigos na mídia científica nacional. É autor dos livros “Estudos cartesianos: a influência da Matemática nas Regras para a Direção do Espírito” (2012) e “Estudos cartesianos: a formação acadêmica” (2007).
- 3 É Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Goiás – UFG e Graduada em Matemática pela mesma instituição de ensino superior. É docente de Matemática na Pontifícia Universidade Católica de Goiás – PUC-GO. Atua na Linha de Pesquisa de Ensino de Matemática e como integrante do Projeto de Pesquisa sobre As superfícies quádricas sob a perspectiva dos objetos de aprendizagem virtuais. Participa como integrante do Projeto de Extensão Criação de um ambiente virtual de ensino-aprendizagem de Matemática customizado para a Plataforma Moodle e do Projeto de Extensão Calcule!.
- 4 É Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Goiás – UFG e Graduada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Goiás – PUC-GO. É docente de Matemática na Pontifícia Universidade Católica de Goiás – PUC-GO. Atua na Linha de Pesquisa de Novas tecnologias na perspectiva do ensino desenvolvimental. Participa como integrante do Projeto de Pesquisa As potencialidades pedagógicas das novas tecnologias no desenvolvimento matemático investigadas do ponto de vista da Teoria Histórico-crítica. É premiada no concurso Professor Inovador em 2006, pela Secretaria de Educação de Aparecida de Goiânia.

IΦ-*Sophia*

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

lygivieira@gmail.com.Leonardo Antônio Souto⁵leonardosouto12@yahoo.com.br.

Resumo

Nesse artigo apresentamos uma proposta de atividade baseada no ensino desenvolvimental de Davydov para o ensino de Matemática. De cunho bibliográfico, busca nos autores da teoria histórico-cultural e na investigação Matemática sustentação para justificar a proposta. Propõe, em linhas gerais, que abandonemos o ensino de caráter puramente descritivo para um ensino baseado em atividades planejadas sob o ponto de vista teórico. Dessa forma, o planejamento das atividades deve ser cuidadosamente pensado para que se alcance a essência ou o núcleo do objeto matemático, neste caso o conteúdo de cônicas, a saber, elipse. O resultado obtido pelas discussões desenvolvidas no grupo de estudo nos conduz a síntese de que a atividade deve permitir o movimento do abstrato para o concreto para que o aluno compreenda o conteúdo possibilitando-o fazer o movimento de volta, do concreto para o abstrato, concebendo que o melhor método é aquele que trabalha o conhecimento do geral para o particular. Assim, para compreender o todo do objeto estudado, se faz necessário um estudo histórico do conteúdo com a finalidade de compreender seu desenvolvimento, mostrando as reais necessidades de sua criação e teorização. Como esta base teórica considera que o método deriva do conteúdo, adotamos o *software* Geogebra como um elemento importante para a mediação pedagógica do assunto, uma vez que permite integrar na mesma tela a linguagem algébrica e a geométrica de forma dinâmica, possibilitando observar os objetos em diversas posições e situações, permitindo ao aluno conjecturar e testar hipóteses. Adotamos como estratégia, para o

5 É Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Goiás – UFG, Especialista em Matemática pela Universidade Federal de Goiás – UFG e Graduado em Matemática pela mesma instituição de ensino superior. É servidor público estadual, docente de Matemática na Universidade Estadual de Goiás – UEG e da Pontifícia Universidade Católica de Goiás – PUC-GO. Atua nas Linhas de Pesquisa de História da Matemática, com ênfase na história do Cálculo Diferencial e integral e As potencialidades pedagógicas das novas tecnologias no desenvolvimento matemático investigados do ponto de vista da Teoria Histórico-crítica. Atua como Coordenador do Projeto de Pesquisa sobre o Ensino do Cálculo Diferencial com ênfase na História e no Projeto de Pesquisa Transformações de Ribaucour para Hipersuperfícies em formas espaciais. É autor do livro “ENADE comentado” (2014).



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

arranque da atividade, um problema que seja motivador e também a investigação matemática para seu desenvolvimento.

Palavras-chave: Matemática; Ensino desenvolvimental; Davydov.

Resumo

En ĉi tiu artikolo ni prezentas proponon bazita aktiveco en evoluaj Davydov de edukado al la instruado de matematiko. Bibliografia naturo, persekutado de la aŭtoroj de kultura-historia teorio kaj matematiko subteno esploro pravigi la propono. Ni proponas, en ĝenerala linioj, por forlasi la pure priskriba karaktero edukado por instruado bazita pri aktivecoj planitaj sub la teoria vidpunkto. Tiel maniero, la planadaj aktivecoj devas esti singarde elpensita por atingi la esencon aŭ kerno de matematika objekto, en tiu kazo, la enhavo de konusa, nome elipso. La rezulto akirita de diskutoj evoluigita en la studa grupo kondukas al sintezo de tiu aktiveco devus permesi la abstrakta movado al la konkreta, por ke la lernanto komprenas la enhavon por ebligi vin fari la movon reen, de konkreta por abstraktaj permesante ke la plej bona metodo estas kiu laboras la ĝenerala scio de la aparta. Tiel, por Kompreni tuton de la studita objekto, necesas enhavo de historia studo por kompreni ke ĝian evoluon estas necesa, montrante la veraj bezonoj de ĝia kreo kaj teorieco. Kiel ĉi teoria bazo konsideras ke la metodo devenas de la enhavo, ni adoptis la GeoGebra programaro kiel grava elemento en la mediacio de la temo, ĉar ĝi permesas integri en la sama ekrano la algebra lingvo kaj la geometria dinamike, ebligante observi objektojn en diversaj pozicioj kaj situacioj, permesante studentojn diveni kaj testo hipotezoj. Ni adoptis strategion por la komenco de la aktiveco, problemoj kiu motiviganta kaj ankaŭ matematika esplorado por evoluo.

Ŝlosilvortoj: Matematiko; disvolviĝa; Davydov.

Abstract

The authors didn't send the summary. We're sorry!

Introdução

Segundo Castells, na era da informação, por incrível que pareça, vivemos uma crise de obsolescência sem precedentes na educação. Se testes nacionais e internacionais detectam pequenos avanços na educação brasileira, em nossa prática notamos um estado desolador da nossa educação Matemática revelando uma distorção imensa entre o discurso político sensacionalista e a real situação. De fato, são

*IΦ-Sophia*

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

vários problemas e do ponto de vista metodológico, nossa educação está ainda baseada nos processos descritivos, onde o professor, em aula, descreve os objetos sem vínculo com a realidade, um conhecimento que se coloca externo aos discentes, confirmando as intenções políticas de que a educação científica seja direcionada aos vários testes estipulados pelo poder econômico e político, deturpando o seu real sentido: educar para formação científica.

Se mais de oitenta por cento do conhecimento humano já está digitalizado, continua Castells, então se agrava ainda mais esta crise. Pois podemos acessar o conhecimento a qualquer momento e de diversas formas, diante das possibilidades que este conhecimento é oferecido na mídia eletrônica. A grande pergunta que nós professores devemos fazer neste momento é: o que fazer com todo esse conhecimento disponível? Uma educação de qualidade pode ser uma resposta e a saída para essa crise da obsolescência da educação. Neste aspecto, é necessário repensar nossa prática, principalmente porque estamos inseridos num contexto educacional onde as forças sociais nos empurram para a alienação e a não reflexão de nossos atos, nos tornando até mesmo desacreditados que algo pode ser feito.

Neste artigo abordamos a questão metodológica, defendendo que a educação de qualidade deve ser pautada na reflexão teórica buscando incorporá-la na nossa prática pedagógica de modo a torná-la significativa, nos tornando pensadores dessa relação.

Não acreditamos que um único aporte teórico seja capaz de modificar essa realidade, mas que poderemos contribuir com o debate apresentando uma proposta para a reflexão no meio acadêmico. Nosso objetivo é apresentar uma sugestão teórica de atividade voltada à educação Matemática, fundamentada nos



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

pressupostos davydovianos, integrada com o suporte de um *software*, levando em consideração o caráter do conhecimento matemático. Consideramos importante, para o nível que essa atividade é direcionada, trabalhar a investigação matemática concomitantemente, pois como sabemos a matemática se desenvolve cientificamente pela resolução de problemas que geram outros problemas revelando linhas de pensamento no contexto da Matemática.

Para explicar nosso propósito discutimos alguns fundamentos teóricos essenciais, afim, de no final, apresentar uma possibilidade de atividade relacionada ao conteúdo de geometria analítica, especificamente a cônica elipse.

A investigação matemática como estratégia de ensino

Atualmente, não é difícil encontrar pessoas para as quais o ensino de Matemática tenha sido um trauma, provocando uma aversão dos mesmos com relação a disciplinas que envolvam Matemática. Este fato se deve às experiências matemáticas não vividas durante o ensino básico, este que é marcado por um ensino descritivo, onde o professor, em aula, procura descrever os conteúdos matemáticos a partir do livro didático.

A Matemática é apresentada aos alunos como uma ciência rígida e sistematizada. De acordo com Pólya (1957, p.7) “A Matemática tem duas faces: é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo a mais... a Matemática em construção aparece como uma ciência experimental indutiva.” Sob esta perspectiva e de outros autores, tem-se a Matemática como um campo de descobertas, de multidisciplinaridade, de investigação. A postura investigativa permite uma ação especulativa, mais dinâmica, propiciando ao aluno o sentimento de criação da Matemática.



IΦ-*Sophia*

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

A investigação matemática propõe uma concepção de aprendizagem significativa, na qual a interação entre o aluno e o objeto de estudo é feita por meio da proposição, por parte do professor, de situações problema que propiciem a busca de relações entre entes matemáticos, criação e teste de conjecturas, bem como a elaboração de conclusões e resultados fundamentados matematicamente. É conveniente mencionar que investigação e resolução de problemas são duas situações bem próximas, pois ambas se baseiam na inquirição matemática. Porém, diferem no que diz respeito ao resultado final, pois na resolução de problemas é bem definido o resultado, enquanto que na investigação, dependendo da postura do professor e da atitude dos alunos, há infinitas possibilidades de resultados e conclusões.

Nesta direção, o professor deixa de ser o principal agente, o detentor do saber, para ser um mediador no processo de ensino-aprendizagem. O aluno passa a colaborar nas aulas, não mais como mero receptor das informações, mas há uma troca de experiências com os colegas e professor, a partir das quais ocorrerá a interiorização e posterior apropriação do conceito proposto.

Ao utilizar da investigação matemática percebem-se elementos comuns desta com as vertentes do ensino desenvolvimental. Esta última prega que a história do objeto é essencial para seu entendimento, assim como um problema motivador o qual pode criar a necessidade nos alunos de estudar os conceitos envolvidos e desenvolver nestes uma postura científica quanto à realidade social em que está inserido. Além disso, acredita-se que a aprendizagem se dá do coletivo para o individual, o que é possível por meio da investigação ao propor situações problemas nas quais haverá uma troca de saberes prévios e formulação dos novos conceitos entre os alunos.

*IΦ-Sophia*

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

Assim, nesse trabalho, pretendemos utilizar a investigação matemática para que o aluno se aproprie da temática proposta manipulando objetos, fazendo testes, compreendendo a essência dos objetos e tirando conclusões a respeito das propriedades destes visando uma aprendizagem significativa. Isto se dará por meio de atividades que contemplem as características da investigação matemática e do ensino desenvolvimental. Outras características do ensino desenvolvimental serão complementadas no desenvolvimento das atividades.

Os principais marcos teóricos do ensino desenvolvimental

Um dos teoremas básicos da teoria histórico social é que o conhecimento se dá do interpessoal para o intrapessoal. De fato, a criança nasce num mundo desenvolvido sob todos os aspectos. Busca inicialmente se apropriar dos valores culturais transmitidos pela família, pela sua vida social, pelas linguagens falada, escrita e simbólica, todas elas com alto grau de complexidade. Seu conhecimento empírico vai se consolidando, fundamentado nas suas relações sociais. Nesta relação com o mundo que o concerne, a atividade mental da criança é mediatizada pela linguagem juntamente com os objetos ali constituídos, os quais estão carregados de historicidade e são interiorizados, isto é, a criança se apropria dos êxitos do desenvolvimento histórico e dos objetos criados pelo homem para dominar seu ambiente. Isso se dá inicialmente através da comunicação, depois pela atividade mental, às vezes reprodutiva e criadora, num processo sem fim (FREITAS; LIMONTA, 2012, p. 76).

Consideramos assim que em aula, o professor não deve perder de vista que a aprendizagem se dá por essa via, contemplando a coletividade que se transformará em atividade individual. O processo é do social para o individual, isto é,



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

primeiramente o aluno interioriza os conteúdos no plano social para depois aplicá-los a situações particulares.

Desse modo, segundo Libâneo, citado por Freitas e Limonta (2012, p. 9), Davydov, um dos precursores da teoria histórico-cultural, iniciada por Vygotsky, em seu ensino desenvolvimental, defende a escola e o ensino dos conhecimentos científicos, éticos, estéticos e técnicos como os principais meios de promoção do desenvolvimento psicológico e sociocultural desde a infância.

De fato, os conteúdos científicos representam a síntese do pensamento humano em uma determinada área, evidenciando a importância de seu ensino. Tais conhecimentos estão presentes principalmente nos livros, *softwares*, teses, entre outros. Como por exemplo, se considerarmos o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) como é apresentado nos livros didáticos não fica claro sua importância, sendo apenas mais um resultado comunicado ao aluno, sua representação constitui um momento importante de sua história. Para o aluno é essencial compreender seu alcance, com a finalidade de apropriá-lo, pois, deste resultado se tem o desenvolvimento do pensamento matemático, nesta e em outras situações que serão apresentadas à medida que se avance no estudo do Cálculo. Não é difícil entender a relevância desse resultado para o desenvolvimento humano e assim, compreender a afirmativa de Davydov: o papel da escola é ensinar conceitos científicos.

Embora essa premissa de Davydov seja algo incontestável, não podemos deixar de dizer que nossas escolas não estão conseguindo realizá-la. Os dados sobre a educação brasileira são alarmantes e nossa experiência corrobora com todas as pesquisas divulgadas recentemente sobre o estado desolador do ensino de Matemática.



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

Assim, temos a urgência em pensar a educação matemática praticada em sala de aula, onde acontecem ou deveriam acontecer os processos significativos de aprendizagem e que para nós corresponde a um importante momento da educação em geral.

Um segundo teorema da teoria histórico cultural diz que a atividade precede o desenvolvimento. A atividade proposta pelo professor em aula tem a finalidade de ensinar conceitos científicos. Para Davydov, ela é essencial para que o aluno compreenda os conceitos científicos e precede seu desenvolvimento mental, afirmando que a atividade impulsiona o desenvolvimento e não é, nesta perspectiva, a simples reprodução dos conteúdos expostos pelo professor, como é costume na nossa educação, mas deve emergir da relação do sujeito com o objeto a partir de uma situação proposta com esta finalidade. Assim, o professor deve organizar o ensino considerando as ações mentais que serão realizadas pelo aluno, contemplando a historicidade do objeto para que ele entenda a importância de sua criação, seu desenvolvimento, repensando o cotidiano cientificamente.

Para este fim, o planejamento do ensino nessa perspectiva solicita ao professor que conheça a origem histórica e o desenvolvimento dos conteúdos tanto na lógica própria do campo científico quanto em suas relações com outras ciências e com a cultura geral. Essas relações, verificadas pelo professor, serão comunicadas aos alunos junto com o conteúdo, e isso tem como objetivo que aprendam a estabelecer suas próprias relações e operem criativamente o conceito, tornando-o uma ferramenta de pensamento própria (PERES; FREITAS, 2014, p. 13).

É necessário compreender a influência de gerações de pensadores que participaram deste desenvolvimento, elucidando os motivos que impulsionaram a

*IΦ-Sophia*

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

descoberta ou a criação do objeto. Exemplificaremos brevemente com a finalidade de explicar melhor esse pressuposto, utilizando o exemplo do TFC.

Arquimedes sabia como calcular áreas por um processo semelhante ao método da Integral, isto é, inscrevendo figuras de áreas conhecidas como triângulos, quadriláteros, etc., em outras desconhecidas, obtendo o mesmo resultado. Apolônio também já sabia traçar retas tangentes às cônicas, mas não há nos escritos gregos nenhuma percepção da relação entre essas duas operações. Já no séc. XVII, os matemáticos Newton e Leibniz perceberam a relação entre estas duas operações. Neste caso, a motivação era nítida, pois os cientistas europeus procuravam formas de explicar o Universo e, além disso, fatores políticos, econômicos e sociais impulsionavam a busca por explicações para fatos que até então a ciência vigente não conseguia responder. A forma atual do TFC passa necessariamente pelo desenvolvimento de outros campos científicos tais como o da simbologia e o da Análise Matemática, criando, assim, o seu cenário. Desde então, ele vem sendo aplicado em diversas situações, permitindo o avanço das ciências. Chega-nos com uma roupagem moderna, adaptado a uma linguagem algébrica bem desenvolvida, também fruto de um desenvolvimento histórico.

No contexto da Matemática e da Física, o TFC representa uma verdade inabalável e constitui-se num evento extraordinário para o mundo científico, uma vez que, por ele, podemos explicar boa parte das teorias que regem o universo físico circundante, demonstrar teoremas matemáticos e aplicá-los às ciências que tenham a Matemática como suporte. Sua história ajuda-nos a compreendê-lo de forma abrangente e significativa.

O exemplo apresentado nos mostra que o conhecimento científico é

IΦ-*Sophia*

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

fruto da validação científica e passa assim para o status de abstrato, produto final de um pensamento histórico e coletivo. Assim, o professor bem preparado planeja uma atividade com a finalidade de ensiná-lo e, para tanto, deve torná-lo concreto para que em seguida o aluno consiga visualizá-lo de forma abstrata, como está constituído. Torná-lo concreto significa que a atividade proposta deve ter a dimensão de percebê-lo em uma situação que permita compreendê-lo, retornando para o status de abstrato, ou seja, que o abstrato foi apreendido e daí se tornou um conhecimento sólido em seu intelecto, concreto em sua rede de conceitos.

Em nossa tradição escolar geralmente o professor apresenta esse conhecimento científico de forma descritiva, mas isso para Davydov é insuficiente. É necessário que a atividade estimule a capacidade de pensar, sendo capaz de, a partir de uma situação planejada, permitir que o aluno entenda o seu porquê. Por exemplo, para ensinar funções, a atividade deve permitir ao aluno compreender essencialmente porque o matemático define função daquela forma. Portanto, a história do conceito ajudará a explicá-lo e a atividade proposta deve ser planejada incluindo esse pressuposto, além de permitir ao aluno apropriá-lo.

O professor deve buscar o princípio geral do objeto, com a finalidade de que o aluno compreenda esse princípio, inicialmente aplicando-o a situações particulares que permitam o aluno acessar o núcleo do objeto. Isso é algo plausível e importante para o ensino da Matemática, pois os objetos matemáticos possuem núcleos e essências bem definidas e também uma história, sendo um trabalho possível no contexto escolar.

Segundo Davydov, *apud* Peres e Freitas (2014, p. 10), uma premissa básica do ensino desenvolvimental é que os métodos de ensino decorrem do



IΦ-*Sophia*

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

conteúdo, ou ainda, dos conceitos que compõem os conteúdos escolares. Portanto, a atividade de aprendizagem é a organização e proposição, pelo professor, de um conjunto de tarefas que poderão levar o aluno a formar em sua mente diversos conceitos que, inter-relacionados, compõem um dos conteúdos de uma determinada área do conhecimento a ser apreendido.

Para ensinar determinado conteúdo é necessário pensar numa atividade que permita o aluno acessar o núcleo deste. Assim, uma metodologia pode ser adequada para trabalhar propriedades de funções e geometria euclidiana, por exemplo, mas pode ser inadequada para o ensino de análise combinatória, sendo necessária outra para este fim.

Consideramos importante a questão da motivação para a efetivação da aprendizagem. Logo, a atividade proposta deve se constituir como motivadora para que o aluno deseje aprender. É necessário que o professor trabalhe a questão da emoção em suas atividades de modo a despertar no seu aluno esse desejo. Um passo nesta direção é conceber que, em aula, lidamos com sujeitos potenciais e inteligentes. Então devemos valorizar a existência do outro levando a proposta a todos os partícipes ali presentes, considerando a coletividade.

O professor, ao considerar as características psicológicas, culturais e sociais de seus alunos, proporá atividades integradoras de modo a levar em consideração a transformação do pensamento empírico de seu aluno em pensamento científico. A atividade deve ser o elo entre esses dois mundos.

Davydov (1988) diz que o melhor ensino é aquele realizado por meio da pesquisa com atividades de resolução de problemas, pois essas estimulam o pensamento do aluno e o leva a assimilar novos conceitos, adquirindo novas ações



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

mentais. Um problema, quando bem elaborado, já motiva o aluno a aprender e possibilita uma relação ativa com o conteúdo, desenvolvendo o pensamento científico. Vale ressaltar que a proposta de Davydov para a resolução de problemas não coincide com a proposta de Pólya (1995) que é tão difundida entre os professores de Matemática. Pode-se até utilizar as ideias de Pólya como um suporte para a criação da atividade, mas faz-se necessário considerar a formação do conceito por meio do seu processo histórico e a ascensão do conhecimento do abstrato ao concreto, como é bem explicado por Freitas (2012) ao analisar esses dois métodos de ensino por resolução de problemas e concluir que o método fundamentado na abordagem histórico-cultural pode potencializar o desenvolvimento mental do aluno e atribuir mais qualidade à aprendizagem, podendo ser aplicado nos diversos níveis de ensino. Moretti (2014, p. 34) explica este fato da seguinte maneira: “De modo a manifestar a essência do conceito, o problema desencadeador ou a situação-problema deve impregnar-se da necessidade que levou a humanidade à construção do conceito e favorecer uma generalização que supere a experiência sensorial”.

A proposta da Investigação Matemática coaduna-se com a proposta do ensino desenvolvimental, seu objetivo é integrar ensino e pesquisa, pois estabelece um ensino em que o aluno participa ativamente do processo, investigando os problemas sugeridos com o objetivo de se desenvolver matematicamente, pois a atividade promove a maturidade do pensar do aluno. Interessante notar que a metodologia empregada no processo investigativo varia de acordo com o conteúdo. Na Investigação Matemática com o Geogebra é necessário pensar sobre os conteúdos que podem ser abordados usando este *software*. Por exemplo, funções, geometria, estatística são conteúdos interessantes para essa metodologia, uma vez que podemos



IΦ-*Sophia*

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

integrá-los, em uma mesma tela dividida em três representações: algébrica, geométrica e uma planilha de cálculo. Isso é importante, pois o aluno pode manipular o objeto matemático e comparar suas representações. Tudo isso, ainda articulado com a Investigação Matemática, pode potencializar o ensino.

Com as diversas formas de se trabalhar com o Geogebra, podemos sugerir atividades que levem os alunos a desenvolverem seus argumentos, trabalharem em grupos, verificarem conjecturas, aprofundarem sua visão em relação às restrições que determinadas situações podem oferecer (muito comuns nos estudos de Matemática), apresentarem maior rigor em suas conclusões, discutirem e ampliarem seus conhecimentos.

Na Investigação Matemática em Sala de Aula, o papel do professor se evidencia no sentido de desafiar, avaliar o progresso e apoiar o trabalho dos alunos, ensinando-os a raciocinar matematicamente:

No acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos, ele deve procurar atingir um equilíbrio entre dois pólos. Por um lado, dar-lhes a autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática. Com esse duplo objetivo em vista, o professor deve procurar interagir com os alunos tendo em conta as necessidades particulares de cada um e sem perder de vista os aspectos mais gerais de gestão da situação didática. Desse modo, o professor é chamado a desempenhar um conjunto de papéis bem diversos no decorrer de uma investigação: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles (PONTE et al., 2013, p. 47).

Assim, dentre as várias contribuições que a integração entre o ensino desenvolvimental e a Investigação Matemática em Sala de Aula podem trazer, destacamos: a integração entre os conteúdos científicos e o desenvolvimento dos



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

processos de pensamento, a necessária correspondência entre a análise de conteúdo e os motivos dos alunos no processo de ensino e de aprendizagem e a fundamentação teórica dos professores no conteúdo da disciplina bem como na sua didática. Nossa proposta está alicerçada nestes princípios.

Sugestão de integração entre esses suportes teóricos

Como o conhecimento de dá no sentido do interpessoal para o intrapessoal, o professor então deve buscar estruturar a atividade com elementos que permitam ao aluno se apropriar do conhecimento, que é externo, contemplando também a pressuposto que a atividade precede o desenvolvimento, procurando formas de que o aluno internalize este conhecimento.

Breve desenvolvimento histórico das Cônicas

Começamos nossa proposta com a história do objeto na tentativa de motivar e mostrar a importância do conteúdo para o ensino científico e suas inter-relações com outras áreas do conhecimento, mostrando seu alcance teórico.

O interesse pelo estudo das cônicas iniciou-se provavelmente no século IV a.C. e foi posteriormente ampliado pelo trabalho de vários matemáticos ao longo da história. Mesmo os historiadores considerando obscura a origem da teoria das cônicas, é possível que tenha sido a partir do problema da duplicação do cubo, figura 1, que é um problema clássico da matemática grega assim definido:

Dado um cubo de aresta a , determinar, com régua não graduada e compasso, o lado b de outro cubo com o dobro do volume.



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

Figura 1: Duplicação do cubo

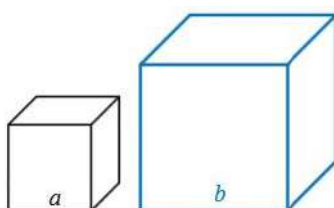


Figura 1: Duplicação do cubo (CORREIA, 2013, p.5)

As várias tentativas de resolução desse problema desencadearam descobertas geniais na matemática, entre as quais as primeiras ideias sobre as cônicas. Segundo Carlos Sá (2000 apud CORREIA, 2013) Hipócrates de Chios (470 – 410 a.C.) reduziu o problema à determinação de dois meios proporcionais de a e $2a$, isto é, determinar x e y tais que $a : x = x : y = y : 2a$. Na figura 2 temos a representação dos meios proporcionais de a e $2a$.

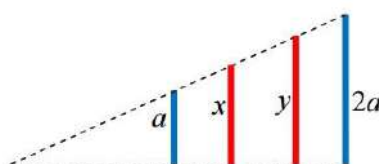


Figura 2: Representação dos meios proporcionais de a e $2a$ (CORREIA, 2013, p. 5)

No entanto, a descoberta dessas curvas é creditada a Menaechmus (380 – 320 a.C.) por volta de 360 a.C. ou 350 a.C., pois foi ele quem construiu as curvas com as propriedades algébricas apresentadas na duplicação do cubo e consequentemente mostrou que o ponto de interseção delas daria as médias



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

proporcionais x e y desejadas.

Neto (2008, p. 10) também apresenta em seu trabalho que a origem dos primeiros estudos sobre as cônicas foi iniciada por Menaechmus: “Ele partiu de duas proporções denominadas “dois meios proporcionais” anteriormente apresentadas por Hipócrates e sugeriu a construção de curvas até então desconhecidas. A solução do problema da duplicação do cubo seria a interseção entre duas parábolas ou também entre uma parábola e uma hipérbole”, como podemos verificar na figura 3.



Figura 3: Solução gráfica do problema da duplicação do cubo
(CORREIA, 2013, p. 5)

Bongiovanni (2001 *apud* NETO, 2008) cita matemáticos que atribuem esse pioneirismo a Menaechmus: Eratóstenes (276 a.C.), Próclus (400d. C.) e Eutocius (500 d.C.). Diz ainda que embora não haja qualquer texto que mostre seu conhecimento também da elipse, Eratóstenes se refere às três curvas como “Tríade Menechmiana”.

No livro XI dos Elementos, Euclides (330 – 260 a.C.) definiu um cone como um sólido gerado por um triângulo retângulo girando em torno de um dos catetos e classificou-os como sendo acutângulos, retângulos ou obtusângulos conforme o ângulo do vértice for respectivamente agudo, reto ou obtuso. Uma secção



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

de tais cones obtém-se cortando os respectivos cones por um plano perpendicular a uma geratriz. Os resultados ilustram-se na figura 4. Segundo Correia (2013) Menaechmus chamou essas secções de “secção de um cone de ângulo agudo” – Elipse, “secção de um cone de ângulo reto” – Parábola e “secção de um cone de ângulo obtuso” – Hipérbole.

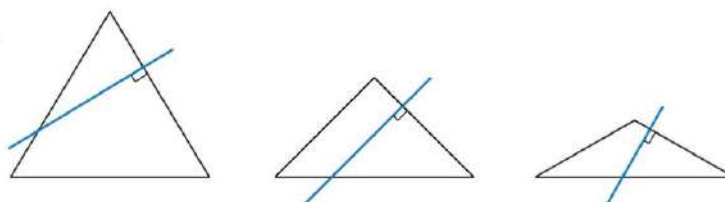


Figura 4: Secções por um plano perpendicular a uma geratriz
(CORREIA, 2013, p. 5)

Foi somente com Apolônio (262 – 190 a.C.) que as cônicas tiveram um tratamento unificado, o que foi um grande passo para seu desenvolvimento, pois até então cada cônica era obtida de um tipo diferente de cone tendo um tratamento fragmentado. Esse geômetra tornou as três curvas ainda mais próximas, como uma família. Correia (2013) ressalta que essa visão unificada se perdeu no ensino das cônicas ao longo dos séculos e que o estudo de Apolônio foi utilizado no desenvolvimento das cônicas até o século XVII.

De acordo com Correia (2013, p. 9), “para Apolônio não são necessárias restrições quanto à natureza do cone e à rigidez posicional do plano secante”. Dessa forma, de um único cone podem obter-se todas as três seções cônicas, bastando variar a inclinação do plano secante.



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

Bordallo (2011) resume o desenvolvimento histórico das seções cônicas da seguinte forma:

[...] historicamente, as seções cônicas surgem com Menaêcmo, sinteticamente fragmentadas e seu desenvolvimento segue assim até Apolônio, que, ainda sinteticamente unifica as cônicas. No século XVII, Fermat e Descartes inventam a geometria analítica e a partir de então as cônicas passam a se desenvolver sintética e analiticamente unificadas até de La Hire, que desenvolveu o tratamento puramente focal que fragmentou o estudo das cônicas. No século XIX, Dandelin tentou reunificar essas curvas com um teorema que relaciona a definição focal com as seções de um cone (p.7).

De acordo com Correia (2013) Apolônio não trabalhou com as propriedades do foco, mas Diócles (240 – 180 a.C.) seu contemporâneo, foi provavelmente o primeiro a provar a propriedade de reflexão da parábola no tratado *Sobre Espelhos que Queimam*. Foi devido à propriedade da reflexão da parábola que Diócles dá este nome ao tratado, motivado pelo problema de encontrar uma superfície espelhada de forma que, quando orientada para o sol, os raios refletidos por ela se encontrem num ponto, causando, assim, combustão. Diócles mostrou que isto deveria ser verdade para um parabolóide de revolução. Há relatos sobre Arquimedes e outros que apontam que tal espelho foi usado para incendiar navios inimigos, no entanto não temos registros confiáveis para confirmar tal fato.

A maior parte das aplicações envolvendo cônicas está associada às propriedades focais, que ocorrem pela rotação da parábola, elipse e hipérbole em torno de seus respectivos eixos gerando uma superfície cônica de revolução, figura 5.



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

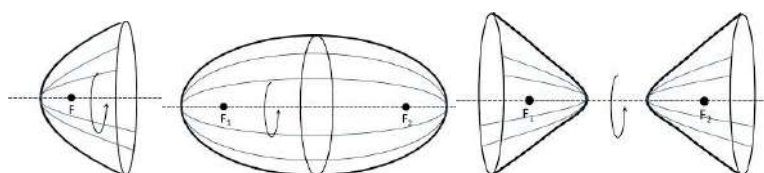


Figura 5: Superfícies de revolução
(LIMA, 2014, p. 90)

As propriedades focais foram apresentadas por Euclides em sua obra *Óptica*. A Lei de Reflexão da Luz já era conhecida, mas Heron de Alexandria (150 a.C – 250 d. C.) provou de forma simples e geométrica que a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão segue do princípio aristotélico: “a natureza nada faz do modo mais difícil”.

O Princípio da Reflexão se aplica a raios de luz, ondas eletromagnéticas, sonoras, de calor, etc, e Heron provou em sua obra sobre óptica *Catoptrica*, usando o princípio do Princípio do Menor Esforço enunciado por Aristóteles, segundo o qual a natureza nada faz do modo mais difícil, que os ângulos de incidência e de reflexão num espelho são iguais. De modo análogo, dada uma superfície refletora os ângulos de incidência e reflexão também serão iguais.

Uma vez apresentada à história do objeto de conhecimento com a finalidade de que o aluno compreenda a importância do conceito, cumprindo uma das características do ensino desenvolvimental, passamos agora ao desenvolvimento de outros elementos que devem compor a atividade. O objetivo principal é fazer com que o aluno compreenda a essência do conceito de elipse nas suas articulações com outras áreas do conhecimento.

Cumprindo tratarmos da questão motivacional, apresentamos uma situação como um problema motivador para desenvolver no aluno a curiosidade para



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

apropriar os conhecimentos teóricos necessários que lhe permitirão organizar ações para atingir o objetivo proposto, o núcleo do objeto.

Inicialmente é necessário que o aluno se aproprie da definição de elipse como sendo um conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (chamados focos F_1 e F_2) é constante.

Para motivar a compreensão da definição mencionada propomos uma atividade que reproduza o conceito nuclear do objeto de tal modo que permita ao aluno compreendê-lo. Tal proposta se baseia no seguinte problema:

A secretaria de infraestrutura de certa cidade contratou um engenheiro para fazer o projeto de uma praça. A praça tem formato retangular medindo 80 m por 120 m, onde deverá ser construído um jardim de tal forma que deva fixar duas estacas, cada uma a 20 metros do ponto médio do menor lado, para em seguida, amarrar as extremidades de uma grande corda de modo a determinar o formato do jardim obtido esticando-a e girando-a em torno das estacas, dando uma volta completa.

A partir da apresentação do problema serão realizados questionamentos com a finalidade de instigar, motivar e interagir direcionando-o para a construção do objeto.

Em seguida serão propostas duas formas de reproduzir a construção concreta do projeto da praça que será em forma de maquete e utilizando o *software* Geogebra, em uma abordagem dinâmica do conceito, ambos almejando a manipulação dos elementos de forma a compreender que o comprimento da corda tem um valor limite e a definição de elipse, respectivamente, Figura 6. Nesta parte, cumprimos com a exigência de que a boa aprendizagem é aquela que transita do abstrato para o concreto, permitindo o movimento de volta possibilitando o aluno compreender a

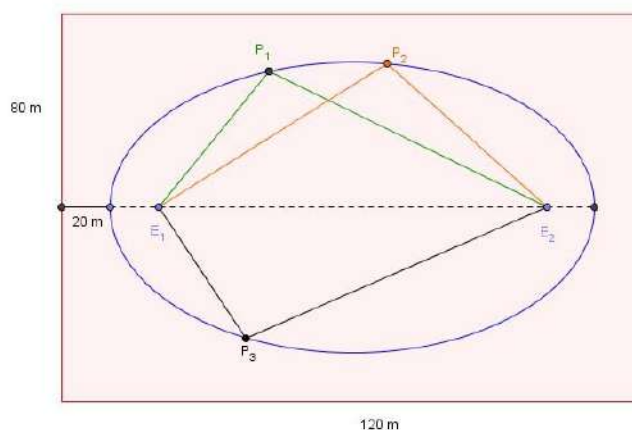


IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

essência do objeto. Também contemplamos o pressuposto do ensino desenvolvimental de que o método deriva do conteúdo. Neste caso acreditamos que o software Geogebra é importante por permitir reproduzir a essência do objeto pelas inúmeras experimentações que permite realizar.

Figura 6. Modelagem do problema motivacional.



A ideia essencial aqui é permitir que o próprio aluno perceba a característica do objeto, a saber, sua definição, construindo o conhecimento a partir da interação.

Em um segundo momento, propomos uma atividade com a finalidade de o aluno compreender a propriedade refletora da elipse, a qual está enunciada na proposição a seguir, utilizando novamente como recurso o Geogebra, porém na interface 3D. Nesta parte, o objetivo é mostrar para o aluno o alcance teórico do objeto em outras situações, buscando a formação do conceito de elipse, fato fundamental no ensino da matemática.



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

Proposição: Seja P um ponto sobre uma elipse com focos F_1 e F_2 e seja t a reta tangente a elipse em P. Se t forma ângulos α e β com os raios focais PF_1 e PF_2 , respectivamente, então $\alpha = \beta$, Figura 7.

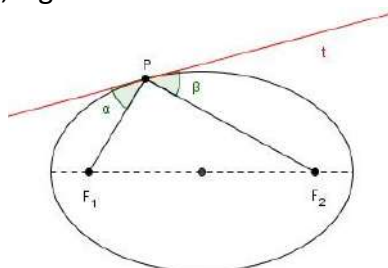


Figura 7- Propriedade Refletora.

Para atingir a essência da propriedade, como prevê o ensino desenvolvimental, buscamos formas de argumentar e explicar utilizando a linguagem específica do conhecimento matemático com argumentos pedagógicos adequados de forma a mostrar o modo de pensar da Matemática. Esta proposição possui duas demonstrações, uma que utiliza geometria analítica e outra com argumentos da geometria plana. Apresentamos a demonstração via geometria plana por esta abrir possibilidade de explorá-la no Geogebra e posteriormente formalizá-la com os alunos. Nessa demonstração utilizamos o seguinte lema.

Lema: Sejam uma elipse E com focos F_1 e F_2 e um ponto P pertencente a E. Seja R o ponto sobre a reta que passa por F_1 e P de tal modo que $PR \perp F_1P$. Se a reta t é a mediatriz do segmento PF_2 , então t é a tangente à elipse no ponto P.

Demonstração do lema: Por definição os pontos (F_1, F_2) de uma elipse são tais que $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, onde $2a$ é o comprimento do segmento também denominado eixo maior da elipse. Assim, os pontos (F_1, F_2) que estão na região



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

interna ou externa da elipse são caracterizados por $\frac{d_1}{d_2} < \frac{a}{b}$ ou $\frac{d_1}{d_2} > \frac{a}{b}$, respectivamente.

Para demonstrar o lema consideramos um ponto P qualquer em t , distinto de Q , e utilizando a definição de elipse mostramos que P pertence à região externa de E . Logo Q será o único ponto comum a t e E , ou seja, o ponto no qual tangencia a elipse.

Considere o ponto Q tal que MQ é a mediatriz do segmento AF_1 , conforme enunciado do lema, obtém-se que $QF_1 = QF_2$, ou seja, Q pertence a E . Seja P um ponto de t distinto de Q , como MQ é mediatriz de AF_1 segue que $QF_1 = QF_2$, Figura 8. Pela desigualdade triangular a soma das medidas de dois lados de um triângulo é sempre maior que a medida do terceiro, então no triângulo QFP tem-se $QF_1 + FP > QP$. Logo, $QF_2 + FP > QP$.

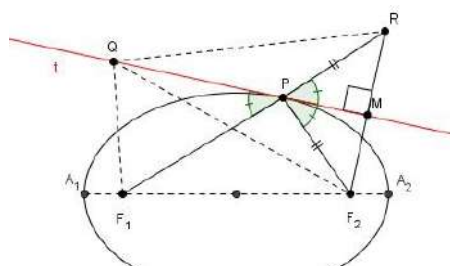


Figura 8- Reta t tangente a elipse E.

Portanto, o ponto P pertence à região externa à elipse, e consequentemente t tangencia a elipse apenas em Q .

Demonstração da proposição. Do lema anterior temos que a reta



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

é tangente à elipse em um ponto t que liga os focos. Com base na Figura 5 percebe-se que a reta t além de mediatriz do segmento F_1F_2 também é bissetriz do ângulo $\angle F_1tF_2$, ou seja, os ângulos $\angle F_1tP$ e $\angle F_2tP$ são iguais.

Assim, concluímos que $\angle F_1tP$ e $\angle F_2tP$ são iguais, pois $\angle F_1tP$ e $\angle F_2tP$ são opostos pelo vértice.

A atividade motivadora para trabalhar esta propriedade, contemplando novamente um dos pressupostos do ensino desenvolvimental, será a proposição de um problema conhecido como galeria dos cochichos (ou sala dos sussurros), onde o teto tem seções transversais que são arcos de elipse com focos, em comum, situados na altura da cabeça das pessoas. Uma pessoa localizada em um foco (F_2) pode compreender outra pessoa cochichando, sem que as demais pessoas que estão na sala compreendam, estando na posição do outro foco (F_1). Pois, as ondas sonoras emitidas de F_1 percorrerão sempre a mesma distância chegando ao mesmo tempo no ouvinte F_2 , o que proporciona uma amplificação do som, garantindo que as ondas sonoras de F_1 atingirão exatamente F_2 pela propriedade refletora da elipse. Fato este que não ocorre em outras posições da sala, pois nestas a distância a ser percorrida pelas ondas sonoras após atingirem o teto não será constante, o que implica tempo diferente de chegada, e também a reflexão das mesmas acontecerá em pontos distintos da sala o que causará uma distorção do som emitido.

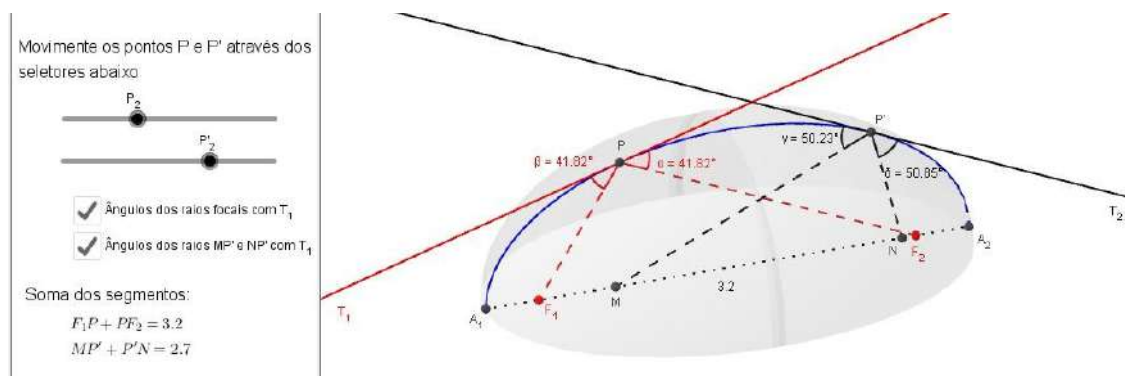


IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

Com o intuito de que o aluno chegue às conclusões citadas acima, propomos a reprodução através do Geogebra 3D de um esboço da galeria dos cochichos, Figura 9. Neste esboço estarão destacados pontos e os focos da elipse e alguns segmentos unindo-os, e também o comprimento e os ângulos de incidência e reflexão dos mesmos com as respectivas retas tangentes. O aluno será instigado a compreender a propriedade refletora da elipse através da interação que o software permite, movimentando os pontos P e P', para posteriormente generalizar e formular a propriedade sugerida.

Figura 9 – Representação da galeria dos sussurros - Geogebra 3D.



Conclusão

Concluimos nossa proposta salientando a importância de incluir aspectos teóricos nas atividades de ensino, destacando pontos fundamentais. Tal proposta exige do professor um movimento importante na busca de novos saberes, devendo sair de uma zona de conforto em busca da integração tecnológica e aportes teóricos novos, renovando e repensando sua prática educativa. A inclusão de tecnologias é interessante, pois elas estão presentes em nossa cultura e ainda não estão incorporadas em nossas práticas devido a diversos fatores dos quais destacamos:



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

a falta de condições apropriadas e de formação continuada para dar o preparo aos nossos professores.

Salientamos que não estamos aqui fazendo apologia e nem afirmando que tecnologias representam a solução de nossos problemas educacionais, apenas que a mente pedagógica moderna não pode desprezar as potencialidades destas e devemos pensar como inseri-las em nossas práticas pedagógicas.

Cumpramos ressaltar que trabalhar dentro desse aporte teórico exige um planejamento profundo, pois pensar a atividade de ensino exige um esforço, uma vez que temos que buscar estruturá-la de acordo com os pressupostos da teoria proposta, exigindo pesquisa na sua fundamentação. Por tudo isso, ressaltamos a importância dessa perspectiva, pois permite reestruturar a atividade de ensino, movendo-nos na direção de trabalhar o ensino de outra forma que não o ensino tradicional, apontado por muitos como desprovido de significado, um ensino de baixa interatividade e de construção de saberes.

Bibliografia

- BONGIOVANNI, Vincenzo. *Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d'enseignants: étude d'une séquence d'activités et conception d'un hyperdocument interactif*. 2001. Doutorado. Université Joseph Fourier, Grenoble, 2001.
- BORDALLO, Mirella. *As cônicas na matemática escolar brasileira: história, presente e futuro*. 2011. 61p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- CORREIA, Mário César Ludgero Fernandes. *Diferentes Abordagens ao Estudo das Cônicas*. 2013. 118p. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores), Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto, 2013.
- DAVYDOV, V.V. *La enseñanza escolar y El desarrollo psíquico: investigación psicológica, teórica y experimental*. Moscou: Editorial Progreso, 1988.



IΦ-Sophia

Revista eletrônica de investigação filosófica, científica e tecnológica

- FREITAS, R. A. M. M. “Ensino por problemas: uma abordagem para o desenvolvimento do aluno”. In **Revista Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 38, n. 2, p. 403-418, abr./jun. 2012.
- FREITAS, R. A. M. M.; LIMONTA, S. V. “A educação científica da criança: contribuições da teoria do ensino desenvolvimental” In **Revista Linhas Críticas**, Brasília, v.18, n. 35, p. 69-86, 2012.
- LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. “Vygotsky, Leontiev, Davydov – três aportes teóricos para a teoria histórico-cultural e suas contribuições para a didática” . In **CONGRESSO BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO**, IV, 2006, Goiânia . **Anais** . Goiânia, 2006.
- LIMA, J. P. de. **Uma proposta para o ensino das seções cônicas no ensino básico mediante o uso de um ambiente dinâmico**. 2014. 146p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal Rural do Semi-árido, Mossoró, 2014.
- NETO, Francisco Quaranta. **Tradução Comentada da Obra "Novos Elementos das Seções Cônicas" (Philippe de La Hire - 1679) e sua Relevância para o Ensino de Matemática**. 2008. 310p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- PERES, T. C.; FREITAS, R. A. M. M. (2014). “Ensino desenvolvimental: uma alternativa para a educação matemática” In **Revista Poiésis**, Tubarão, Volume especial, p. 10-28, jan./jun. 2014.
- POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e Adaptação de H. L. ARAÚJO. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 3ª edição Revista e ampliada. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.
- SÁ, Carlos. “História da Geometria Projetiva” In Encontro luso-brasileiro sobre história da matemática, 1, 1993. **Manuscrito**, Universidade de Coimbra, 1993.
- VAZ, D. A. F. “Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando investigação matemática com o Geogebra” In Revista Educativa, Goiânia, v. 15, n. 1, p. 39-51, jan./jun. 2012.**