

RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS FRACIONÁRIAS NO ESPAÇO USANDO O MÉTODO DA COLOCAÇÃO ORTOGONAL

NUMERICAL SOLUTION OF SPACE-FRACTIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS USING ORTHOGONAL COLLOCATION

William Júnio Lima¹
Fran Sérgio Lobato²
Fábio de Oliveira Arouca³

Resumo: Nas últimas décadas, o interesse pelo estudo de equações diferenciais parciais fracionárias tem atraído a atenção da comunidade científica. Isto se deve a necessidade de estudos relacionados ao desenvolvimento de modelos matemáticos com ordens fracionárias, a influência destas ordens nos perfis obtidos e na adaptação das tradicionais técnicas para o contexto fracionário. Do ponto de vista numérico, tais equações diferenciais parciais fracionárias têm sido resolvidas considerando o Métodos das Diferenças Finitas e de suas variantes. Diante do que foi apresentado, a presente contribuição tem como objetivo aplicar o Método da Colocação Ortogonal como metodologia numérica para a resolução de equações diferenciais parciais fracionárias no espaço. Para essa finalidade, dois estudos de caso são apresentados. Os resultados obtidos demonstram que a metodologia proposta é configurada como uma interessante estratégia para resolver este tipo de problema.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Fracionárias, Colocação Ortogonal, Método Numérico.

Abstract: In last decades, the study of fractional partial differential equations has attracted the attention of scientific community. This is due to studies related to development of mathematical models with fractional orders, the influence of these orders on profiles obtained and adaptation of traditional techniques to solve fractional problems. From the numerical point of view, these fractional partial differential equations have been solved considering the Finite Differences Methods and their variants. This contribution aims to apply the Orthogonal Collocation Method as numerical methodology to solve space-fractional partial differential equations. For this purpose, two test cases are presented. The results indicated that the proposed methodology is configured as an interesting strategy to solve this kind of problem.

Keywords: Fractional Differential Equations, Orthogonal Collocation, Numerical Method.

¹ Programa de Pós Graduação em Modelagem e Otimização, Universidade Federal de Goiás, Av. Dr. Lamartine P. Avelar, 1120, St. Universitário, Bloco M – IMTec, CEP 75704-020, Catalão, GO, Brasil, williamjunio.lima@gmail.com.

² Faculdade de Engenharia Química, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila 2121 - Campus Santa Mônica, Bloco 1K, CEP 38408-144, Uberlândia, MG, Brasil, fslobato@ufu.br.

³ Faculdade de Engenharia Química, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila 2121 - Campus Santa Mônica, Bloco 1K, CEP 38408-144, Uberlândia, MG, Brasil, arouca@ufu.br.

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, o aprimoramento e/ou desenvolvimento de métodos analíticos e/ou numéricos para a resolução de Equações Diferenciais Parciais com Ordem Fracionária (EDPOF) têm atraído a atenção da comunidade científica. O interesse pelo cálculo fracionário se deve ao grande número de aplicações que podem ser realizadas com estes modelos, que se caracterizam pela generalização dos tradicionais modelos com ordem inteira.

Dentre estas aplicações pode-se citar a modelagem de sistemas de engenharia, com destaque para o problema de difusão anômala, que é empregado para representar determinados fenômenos que não podem ser modelados pela lei de Fick. Como exemplo destes fenômenos pode-se citar a influência do atraso de tempo, da retenção de partículas e de aceleração em processos difusivos (SILVA, 2016). Matematicamente, o processo de difusão anômala pode ser interpretado como aquele no qual o deslocamento quadrático médio não é função linear do tempo, diferentemente do processo tradicional de difusão (clássica), onde essa relação é linear (PEDRON, 2003; BEVILACQUA et al., 2011a, 2011b).

Do ponto de vista prático, a resolução analítica de um modelo descrito por uma equação ou um sistema de equações diferenciais fracionárias pode ser obtida apenas para casos bem específicos, sendo que a grande maioria dos problemas deve ser resolvida numericamente. Neste contexto, o Método das Diferenças Finitas (Explícito ou Implícito) configura-se como uma das técnicas numéricas mais empregadas para a resolução de equações diferenciais parciais fracionárias (SZEKERES e IZSÁK, 2015; LIU e HOU, 2017). A escolha por este tipo de abordagem numérica se deve, apesar da sua dependência com o número de pontos de discretização, a simplicidade oriunda desta metodologia em termos conceituais, a aspectos de implementação e por alguns destes apresentarem estabilidade numérica (LIU e HOU, 2017).

Diante do que foi apresentado, a presente contribuição tem por objetivo avaliar a aplicabilidade do Método da Colocação Ortogonal (MCO) para a resolução de equações diferenciais parciais fracionárias no espaço que

representam problemas tradicionais de difusão (clássica e anômala). Para esta finalidade, esta técnica que, tradicionalmente tem sido empregada para resolver problemas diferenciais com ordem inteira, é estendida para o contexto fracionário. Este trabalho está estruturado como segue. A seção 2 apresenta alguns conceitos importantes no que tange equações diferenciais fracionárias. Na seção 3 é descrito o problema matemático de interesse. Já na seção 4 é apresentada a fundamentação teórica do MCO, bem como a sua extensão para o tratamento de equações diferenciais parciais fracionárias. Os resultados obtidos com a simulação do modelo são apresentados na seção 5. A última seção apresenta as conclusões deste trabalho.

2 CONCEITOS PRELIMIARES

O cálculo fracionário teve origem numa troca de correspondências entre Leibniz e L'Hôpital, onde o primeiro indagou sobre a generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem arbitrária. Todavia, a primeira menção concreta da manipulação algébrica do cálculo fracionária ocorreu com S. F. Lacroix, o qual propôs substituir o fatorial na fórmula para a n -ésima derivada da função $y=x^m$, onde n e m são números reais tal que $m \geq n$, pela função Γ , de modo a generalizar a função fatorial para o conjunto dos números complexos diferentes dos inteiros menores ou iguais a zero, obtendo a seguinte relação (GALVÃO et al., 2013; JACYNTHO et al., 2015; BADRI e TAVAZOEI, 2015):

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \quad (1)$$

Como proposto por Lacroix, se fizermos $m=1$ e $n=1/2$, obtêm-se:

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \quad (2)$$

que é equivalente ao resultado obtido utilizando as derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo.

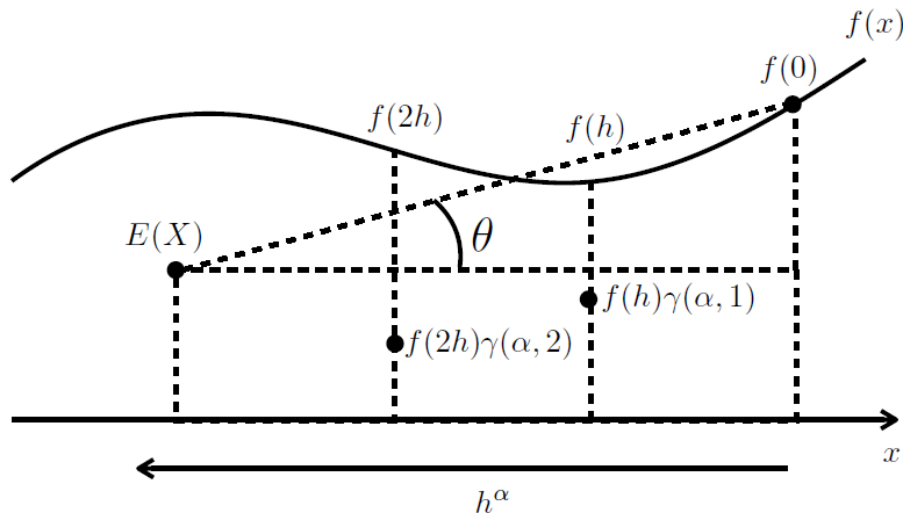
A definição do operador de Grünwald-Letnikov propiciou os primeiros métodos numéricos utilizados no cálculo de derivadas de ordem não inteiras (OLDHAM e SPAINER,1974). Tais métodos também conduzem a aproximações de derivadas e soluções de equações diferenciais de ordem não inteira para a derivada de Riemann-Liouville. Para a integral de Riemann, é feito uma discretização da integral de convolução utilizada na definição do operador de Grünwald-Letnikov. Ainda que aplicáveis, tais métodos demandavam recursos computacionais dificilmente disponíveis até meados da década de 1990. Essa demanda se justifica pelos operadores de ordem não inteira dependerem de memória hereditária do sistema (WESTERLUND,1991). Alternativamente, pode-se aproximar sistemas de ordem não inteira por sistemas inteiros de alta ordem, o que proporciona a obtenção de resultados de forma mais rápida, bem como obtêm métodos numéricos menos trabalhosos computacionalmente para os operadores de derivação e integração de Riemann-Liouville (CHAREF et al., 1992).

Em se tratando da interpretação geométrica de uma equação diferencial com ordem fracionária α , observa-se que não existe uma teoria universalmente aceita sobre o tema. Uma das explicações mais empregadas para essa finalidade foi proposta por Gutiérrez (2010), o qual analisou o cálculo com ordem fracionária através do ponto de vista probabilístico via definição de Grünwald-Letnikov (Gutiérrez et al., 2010):

$$D^\alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{(x-a)/h} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha - m + 1)} f(x - mh) \quad (3)$$

A Figura 1 apresenta a interpretação geométrica da derivada de ordem fracionária segundo Gutiérrez et al. (2010). Nesta figura, Gutiérrez et al. (2010) concluiu que a derivada fracionaria é uma soma ponderada do valor da função $f(x)$, para $k=0$, e valores passados de $f(x)$, para $k > 1$, isto é; $f(x-h)$, $f(x-2h)$ e $f(x-nh)$, em que h é o tamanho do passo de integração e n é o enésimo valor considerado. Se considerarmos α ($0 < \alpha < 1$) o fator de ponderação. Quanto mais próximos estamos do valor de $f(x)$, mais próximo α se aproxima de 1.

Figura 1 - Interpretação geométrica da derivada de ordem fracionária
(Adaptado de Gutiérrez et al. (2010))



Portanto, ao observar a Fig. 1, a derivada de ordem fracionária equivale ao declive da reta (θ) que une o valor presente de $f(x)$ e o outro valor simbolizado por $E(x)$, situado em $x=h^\alpha$ e que representa uma media dos valores ponderados. Repare que a base é sempre paralela ao eixo x , resultando que, para $\alpha=1$, todos os valores do parâmetro γ são nulos e o valor anterior à informação é unitário como na fórmula clássica da tangente (ver a Fig.1). Os valores de γ continuam nulos para $\alpha=0$, exceto para o valor presente que é unitário, fato que resulta no próprio valor da função.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE INTERESSE

Matematicamente, o problema a ser abordado neste trabalho consiste de uma equação diferencial parcial de ordem inteira no tempo e de ordem fracionária no espaço, conforme descrito a seguir (ASLEFALLAH e ROSTAMY, 2014):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = d(x) \frac{\partial u^\alpha(x,t)}{\partial x^\alpha} + q(x,t) \quad (4)$$

$$u(x,t) = f(x), \quad t = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq 1 \quad (5)$$

$$\beta_1 u(x,t) + \beta_2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \beta_3, \quad x = 0, t \geq 0 \quad (6)$$

$$\beta_4 u(x,t) + \beta_5 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \beta_6, \quad x = 1, t \geq 0 \quad (7)$$

em que u é a variável dependente, t ($t \geq 0$) é a variável independente temporal, x ($0 \leq x \leq 1$) é a variável espacial, d é uma função que depende da variável espacial, q é o termo fonte que depende de ambas as variáveis independentes, α ($0 \leq \alpha \leq 2$) é a ordem da equação diferencial parcial fracionária, f é uma função que define a condição inicial e β_i ($i=1, \dots, 6$) são constantes que definem o tipo de condição de contorno considerada.

4 METODOLOGIA

Conforme destacado anteriormente, a literatura especializada tem apresentado diferentes metodologias para a resolução de uma EDPOF. No presente estudo será considerada como metodologia de resolução a extensão do MCO (VILLADSEN e MICHELSEN, 1978), proposto originalmente para a resolução de equações diferenciais parciais com ordem inteira. Para essa finalidade, inicialmente será brevemente apresentado o MCO canônico.

4.1. MCO para a Resolução de EDP com Ordem Inteira

Em linhas gerais, a técnica de colocação consiste na definição de uma função para aproximar a solução em determinados pontos do domínio de interesse (pontos de colocação). Neste caso, obriga-se que a equação original coincida com a solução aproximada nestes pontos, bem como satisfaça as condições de contorno. Apesar da escolha da função de aproximação e dos pontos de colocação poder ser realizada de forma aleatória, tradicionalmente tem-se utilizado como função de aproximação o Polinômio de Lagrange (PL) e como pontos de colocação as raízes de um polinômio ortogonal. Cabe ressaltar que a escolha pelo PL se deve ao fato de que este possibilita a redução do custo computacional associado com a necessidade de obtenção de derivadas em relação a outros tipos de aproximações (VILLADSEN e MICHELSEN,

1978). Além disso, ao se escolher trabalhar com as raízes de um polinômio ortogonal como pontos de colocação, tem-se naturalmente a redução do número de pontos de discretização, o que na prática implica na redução da dimensão do problema a ser resolvido (LARANJEIRA e PINTO, 2001).

A seguir é apresentado o algoritmo de Colocação Ortogonal para a resolução de equações diferenciais parciais com ordem inteira (LARANJEIRA e PINTO, 2001):

1. Definir os parâmetros de entrada: domínio do problema, função peso para a determinação do polinômio ortogonal, grau N da aproximação (o polinômio tem $N+1$ coeficientes);
2. Calcular o polinômio ortogonal de grau $N+1-NCC$, onde NCC é o número de condições de contorno que precisam ser satisfeitas;
3. Calcular as $N+1-NCC$ raízes (pontos de colocação) do polinômio ortogonal;
4. Determinar as equações (resíduo nos pontos de colocação) e as equações derivadas das condições de contorno;
5. Resolver o sistema de equações resultantes;
6. Verificar se a solução obtida não é modificada com o aumento do grau da aproximação.

Para a obtenção do polinômio ortogonal (p) pode-se utilizar a seguinte relação recursiva (LARANJEIRA e PINTO, 2001):

$$p_i(x) = (x + \lambda_i) p_{i-1}(x) + \eta_i p_{i-2}(x) \quad (8)$$

em que i é um contador ($1 \leq i \leq N$), $p_{-1}(x)=0$, $p_0(x)=1$ e λ_i e η_i são constantes determinadas a partir das seguintes relações:

$$\lambda_i = - \frac{\int_0^1 x W(x) p_{i-1}(x) p_{i-2}(x) dx}{\int_0^1 W(x) p_{i-2}^2(x) dx} \quad (9)$$

$$\eta_i = -\frac{\int_0^1 xW(x)p_{i-1}^2(x)dx}{\int_0^1 W(x)p_{i-1}^2(x)dx} \quad (10)$$

em que $W(x)$ é a função peso.

Assim, definindo o número de pontos de colocação, o intervalo $[0,1]$ de integração e a função peso $W(x)$, o polinômio ortogonal pode ser obtido e, conseqüentemente, as raízes onde o sistema a ser resolvido será avaliado.

Finalmente, cabe ressaltar que a qualidade do resultado obtido é função da aproximação considerada, sendo que um aumento excessivo do grau da mesma não necessariamente implica na melhora da qualidade da solução obtida, sendo observado um comportamento oscilatório nas proximidades de regiões onde a solução não experimenta variações pronunciadas (VILLADSEN e MICHELSEN, 1978).

4.2. Extensão do MCO para a Resolução de EDPOF

Na seção anterior foi apresentado o algoritmo para a resolução de uma equação diferencial parcial com ordem inteira. Para a sua aplicação em um problema em que o termo diferencial apresenta ordem fracionária, é necessária uma pequena adaptação no item 4 do algoritmo descrito. Neste caso, a avaliação do PL, em relação ao termo diferencial fracionário, deverá ser realizada de acordo com uma das definições apresentadas na literatura corrente para a diferenciação deste termo. Assim, considerando-se a definição de derivada fracionária para um polinômio dada pela Eq. (1), as derivadas referentes ao PL podem ser obtidas. Para essa finalidade, o termo a seguir é utilizado para representar a derivada fracionária do PL:

$$\frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-\alpha)} X^{i-\alpha-1} \quad (11)$$

em que i é um contador pertencente ao intervalo $[0, N+1]$, X é a variável independente e α é a ordem da equação fracionária.

Com esta pequena mudança pode-se avaliar o termo diferencial fracionário, permitindo a resolução de um problema diferencial fracionário a partir de uma técnica proposta inicialmente para a resolução de um problema diferencial com ordem inteira.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para avaliar a metodologia proposta, a seguir são apresentados dois estudos de caso. Para essa finalidade considera-se a influência do número de pontos de colocação na qualidade da solução obtida através do cálculo do somatório do erro absoluto cometido em cada ponto (Φ), definido como:

$$\Phi = \sum_{i=1}^M (u_i^{cal} - u_i^{ana})^2 \quad (12)$$

em que u_i^{cal} e u_i^{ana} representam os valores referentes a variável dependente calculados numericamente e analiticamente, respectivamente e M é o número de pontos considerados na análise.

5.1. Caso 1

Este estudo de caso considera os seguintes parâmetros do problema definido na seção 3 (ASLEFALLAH e ROSTAMY, 2014):

$$d(x) = \Gamma(0,2)x^{1,8} \quad (13)$$

$$q(x, t) = -(2x - 11x^2)e^{-t} \quad (14)$$

$$f(x) = x(1 - x) \quad (15)$$

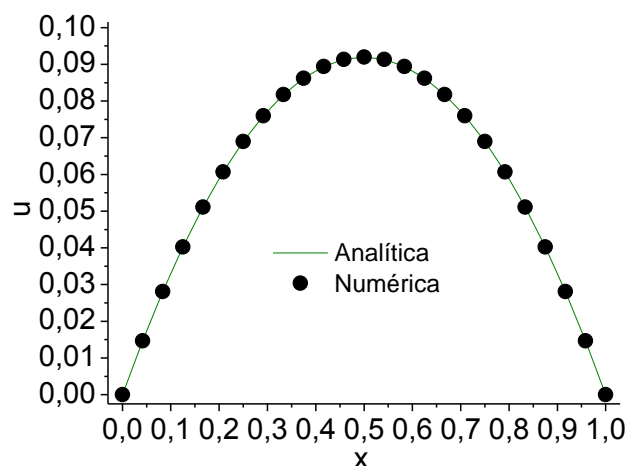
$$u(0, t) = 0, (\beta_1 = 1, \beta_2 = \beta_3 = 0) \quad (16)$$

$$u(1, t) = 0, (\beta_4 = 1, \beta_5 = \beta_6 = 0) \quad (17)$$

A Figura 2 apresenta os resultados obtidos considerando o MCO com $N=5$ (na figura são apresentados pontos interpolados), $W(x)$ igual a unidade e a solução analítica ($u(x,t)=x(1-x)e^{-t}$) (ASLEFALLAH e ROSTAMY, 2014). Nesta figura é possível observar uma boa concordância entre a metodologia proposta

e a solução analítica, o que evidencia a qualidade da solução obtida considerando o MCO estendido para o contexto fracionário.

Figura 2 – Resultados obtidos para o caso 1 considerando $N=5$.



Já a Tabela 1 apresenta a influência do número de pontos de colocação no erro cometido.

Tabela 1 – Influência do N na qualidade da solução obtida considerando o Método da Colocação Ortogonal para o caso 1.

| N | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Φ | $2,8 \times 10^{-8}$ | $1,9 \times 10^{-8}$ | $1,7 \times 10^{-8}$ | $1,5 \times 10^{-8}$ |

Como esperado, na medida em que se aumenta o valor do número de pontos de colocação, o erro cometido é reduzido. Todavia, para o estudo em questão, dois pontos de colocação já seriam suficientes para a obtenção de uma solução numérica com boa aproximação em relação à solução analítica. Além disso, quando comparam-se os resultados obtidos pela metodologia proposta em relação ao melhor resultado reportado por Aslefallah e Rostamy (2014) considerando o Método de Crank-Nicholson (com parâmetro igual a 0,6 e tamanho de passo de integração igual a 0,05, o que corresponde a um erro da ordem de $9,116 \times 10^{-4}$ para um sistema com 20×20 equações), observa-se erros de menor magnitude. Cabe ressaltar que o problema resolvido com a

aplicação do MCO tem dimensão final proporcional ao valor do número de pontos de colocação. No presente estudo, o modelo final a ser resolvido é composto por $25 \times N$ equações, um número bem menor do que o empregado por Aslefallah e Rostamy (2014).

5.2. Caso 2

O último estudo de caso considera os seguintes parâmetros (ASLEFALLAH e ROSTAMY, 2014):

$$d(x) = \Gamma(1,2)x^{1,8} \quad (18)$$

$$q(x, t) = e^{-t}(-12x^2 + 24x^3 - 10,1x^4) \quad (19)$$

$$f(x) = x^2(2 - x)^2 \quad (20)$$

$$u(0, t) = 0, (\beta_1 = 1, \beta_2 = \beta_3 = 0) \quad (21)$$

$$\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0, (\beta_5 = 1, \beta_4 = \beta_6 = 0) \quad (22)$$

A Figura 3 apresenta os resultados obtidos pelo MCO considerando $N=5$, $W(x)$ igual a unidade e a solução analítica $(u(x,t)=x^2(2-x)^2e^{-t})$ (ASLEFALLAH e ROSTAMY, 2014). Nesta figura observa-se boa concordância entre os resultados obtidos pela metodologia proposta em relação à solução analítica.

A Tabela 2 apresenta a influência do N na qualidade da solução obtida considerando o Método da Colocação Ortogonal para o caso 2. Assim como observado para o primeiro estudo de caso, quanto maior o número de pontos de colocação, menor é o erro cometido. Todavia, para N maiores que três, observa-se que o método numérico saturou, isto é; o aumento deste parâmetro não implica na redução o erro cometido. Assim, em termos práticos, três pontos de colocação já são suficientes para a resolução deste estudo de caso.

Figura 3 – Resultados obtidos para o caso 2 considerando $N=5$.

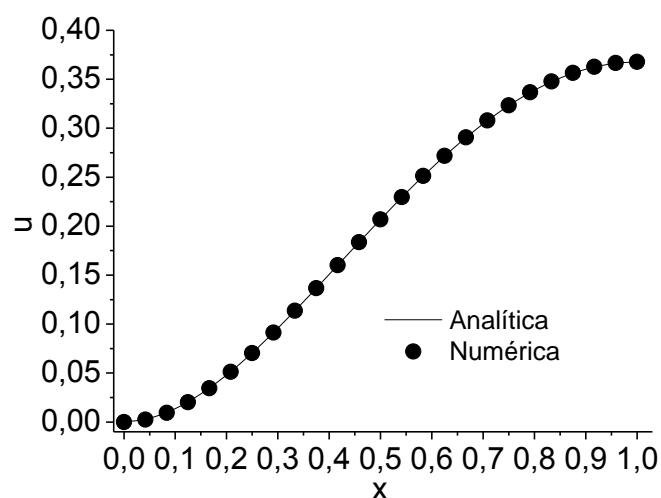


Tabela 2 – Influência do N na qualidade da solução obtida considerando o Método da Colocação Ortogonal para o caso 2.

| N | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Φ | $4,2 \times 10^{-7}$ | $2,5 \times 10^{-7}$ | $2,5 \times 10^{-7}$ | $2,5 \times 10^{-7}$ |

Quando compara-se o resultado obtido com o MCO com o melhor resultado obtido por Aslefallah e Rostamy (2014) (parâmetro do Método de Crank-Nicholson igual a 0,5 e tamanho de passo de integração igual a 0,05, que corresponde a um erro da ordem de $7,325 \times 10^{-3}$ para um sistema com 20×20 equações), também observa-se menores erros para um problema final com menor dimensão, apesar deste ser puramente diferencial (o modelo final a ser resolvido é composto por $25 \times N$ equações).

6 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve por objetivo apresentar a extensão do Método da Colocação Ortogonal, proposto originalmente para a resolução de equações diferenciais parciais com ordem inteira, para a resolução de uma equação diferencial parcial com ordem fracionária no espaço. Neste contexto, foram apresentados os resultados obtidos com a metodologia proposta para dois

estudos de caso, cuja solução analítica é conhecida. Em linhas gerais, foi possível observar que a metodologia considerada foi capaz de obter resultados consistentes com as respectivas soluções analíticas. Além disso, também são considerados coerentes com aqueles reportados considerando o Método de Crank-Nicholson, conforme observado pelo valor do erro encontrado. Todavia, é importante ressaltar que os resultados obtidos pela metodologia proposta foram obtidos com a resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias com um número bem menor de equações, o que implica, naturalmente, em um sistema discretizado bem menor do que aquele considerado pelo Método de Crank-Nicholson. Enfatiza-se que a avaliação da influência da ordem na qualidade da solução obtida não foi objeto de estudo desta contribuição. Ressalta-se que a metodologia proposta pode ser estendida para problemas em que todos os índices sejam fracionários, não só os relacionados com a variável espacial.

Finalmente, é importante enfatizar que os problemas abordados apresentam caráter puramente matemático, isto é; não são estudos específicos do fenômeno de difusão anômalo. Neste cenário, como proposta de trabalhos futuros pretende-se aplicar a metodologia para a identificação de parâmetros em modelos são fracionários e na resolução de problemas de controle ótimo em que os modelos são fracionários.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAPEMIG e do CNPq para a realização deste trabalho. O Dr. William agradece o Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização da Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão por sua bolsa de pós-doutorado do Programa Nacional de Pós-Doutorado (PNPD)-CAPES.

REFERÊNCIAS

Aslefallah, M., Rostamy, D. A Numerical Scheme for Solving Space-Fractional Equation by Finite Differences Theta-Method, Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech. v. 1, p. 1-9, 2014.

Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão. Paranaguá, PR, v.3, n.3, setembro de 2018.

Badri, V., Tavazoei, M. S. Fractional Order Control of Thermal Systems: Achievability of Frequency-Domain Requirements. *Nonlinear Dynamics*, v. 80, p. 1773–1783, 2015.

Bevilacqua, L, Galeão, A.C.N.R., Costa, F.P. A New Analytical Formulation of Retention Effects on Particle Diffusion Processes. *Annals of the Brazilian Academy of Sciences*, v. 83, p. 1443–1464, 2011a.

Bevilacqua, L, Galeão, A.C.N.R., Costa, F.P. On the Significance of Higher Order Differential Terms in Diffusion Processes. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 33, p. 166–175, 2011b.

Charef, A., Sun, H.H., Tsao, Y.Y., Onaral, B. Fractal System as Represented by Singularity Function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 37, p. 1465–1470, 1992.

Galvão, R.K.H., Hadjiloucas, S., Kienitz, K.H., Paiva, H.M., Afonso, R.J.M. Fractional Order Modeling of Large Three-Dimensional RC Networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, v. 60, p. 624–637, 2013.

Gutiérrez, R.E., Rosário, J.M., Machado, J.T. Fractional Order Calculus: Basic Concepts and Engineering Applications. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2010, 19 p., 2010.

Jacyntho, L.A, Teixeira, M.C.M., Assunção, E., Cardim, R., Galvão, R.K.H., Hadjiloucas, S. Identification of Fractional-Order Transfer Functions using a Step Excitation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, v. 62, p. 896–900, 2015.

Laranjeira, P., Pinto, J.C. Métodos Numéricos em Problemas de Engenharia Química, Editora E-Papers, 316 páginas, ISBN 85-87922-11-4, 1º Edição, 2001.

Liu, T., Hou, M. A Fast Implicit Finite Difference Method for Fractional Advection-Dispersion Equations with Fractional Derivative Boundary Conditions, Advances in Mathematical Physics, v. 2017, 8 pages, 2017.

Oldham, K.B., Spanier, J. The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, Volume 111. San Diego: Academic Press, INC., 1974.

Pedron, I.T. Estudos em Difusão Anômala. Tese de Doutorado, Departamento de Física / Universidade Estadual de Maringá, 2003.

Silva, L.G. Problemas Diretos e Inversos em Processos de Difusão Anômala. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2016.

Szekeres, B.J., Izsák, F. A Finite Difference Method for Fractional Diffusion Equations with Neumann Boundary Conditions, Open Mathematics, v. 13, p. 581-600, 2015.

Villadsen, J., Michelsen, M.L. Solution of Differential Equation Models by Polynomial Approximation. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1978.

Westerlund, S. Dead Matter Has Memory! Phys. Scripta, v. 43, p.174, 1991.

Enviado em: 30 mai. 2018

Aceito em: 06 jul. 2018

Editor responsável: Mateus das Neves Gomes

Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão. Paranaguá, PR, v.3, n.3, setembro de 2018.