

CONTROLE DE UM PÊNDULO FURUTA POR ALOCAÇÃO DE POLOS E REGULADOR QUADRÁTICO LINEAR (LQR)

POLE PLACEMENT AND LINEAR QUADRATIC REGULATOR (LQR)

CONTROL OF A FURUTA PENDULUM

Luiz Eduardo Pivovar¹ Uiliam Nelson Lenzion Tomaz Alves² Ricardo Breganon³ Felipe Augusto de Aguiar Possoli⁴ Rodrigo Henrique Cunha Palácios⁵ Márcio Mendonça⁶ 

Resumo: O pêndulo Invertido Rotacional, também conhecido como Pêndulo Furuta, é um sistema mecânico projetado para simular o problema do autoequilíbrio. O problema de controle neste sistema consiste em estabilizar uma haste acima de seu eixo de rotação numa posição de equilíbrio instável. Este sistema também é caracterizado por uma dinâmica multivariável e altamente não linear. Tais características o assemelham a problemas de grande relevância para a indústria e para a sociedade, como a estabilização do lançamento de foguetes e a modelagem de edifícios para o estudo das consequências de abalos sísmicos nestas estruturas. Neste contexto, o presente trabalho apresenta o projeto de controle de um protótipo de Pêndulo Furuta, utilizando os métodos de Alocação de Polos e Regulador Quadrático Linear (LQR), cujas implementações foram feitas com auxílio da plataforma Matlab/Simulink®. Estes controladores foram projetados a partir de um modelo matemático obtido em espaço de estados. Uma vez que nem todas as variáveis necessárias para realimentação são medidas fisicamente, também foi implementado um observador de estados. A partir disto, foi feito um teste constituído por simulação e experimento, para validar o modelo matemático proposto e comparar os desempenhos dos controladores, frente ao objetivo de estabilizar a haste. Por fim, as performances dos controladores são comparadas por análise gráfica. Os resultados indicaram que ambos os controladores foram capazes de estabilizar a haste do Pêndulo na posição vertical, a despeito de variações angulares aplicadas no braço de equipamento. Também foram identificadas características oscilatórias na resposta do sistema para os dois controladores.

Palavras-chave: Pêndulo Furuta. Alocação de Polos. Regulador Quadrático Linear (LQR).

¹ Mestre em Engenharia Mecânica, IFPR, Jacarezinho, Paraná, luiz.pivovar@ifpr.edu.br.

² Doutor em Engenharia Elétrica, IFPR, Jacarezinho, Paraná, uiliam.alves@ifpr.edu.br.

³ Doutor em Engenharia Mecânica, IFPR, Jacarezinho, Paraná, ricardo.breganon@ifpr.edu.br.

⁴ Mestre em Engenharia Mecânica, IFPR, Jacarezinho, Paraná, felipe.possoli@ifpr.edu.br.

⁵ Doutor em Engenharia Elétrica, UTFPR, Cornélio Procópio, Paraná, rodrigopalacios@utfpr.edu.br.

⁶ Doutor em Engenharia Elétrica e Informática Industrial, UTFPR, Cornélio Procópio, Paraná, mendonca@utfpr.edu.br.

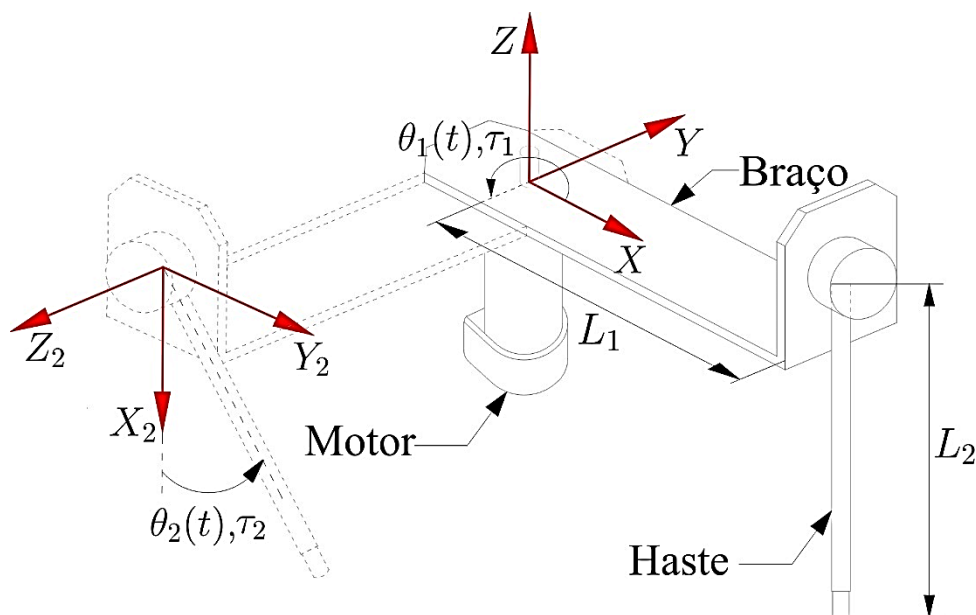
Abstract: The Inverted Rotational Pendulum, also known as Furuta Pendulum, is a mechanical system designed to simulate the self-equilibrium problem. The control problem in this system consists of stabilizing a rod above its axis of rotation in an unstable equilibrium position. This system is also characterized by its multivariable and highly nonlinear dynamics. These characteristics make the control problem similar to problems of great relevance to industry and society, such as the stabilization of rocket launches and the modeling of buildings to study to study the consequences of earthquakes in these structures. In this context, this work presents the control design for a Furuta Pendulum prototype using Pole Placement and Linear Quadratic Regulator (LQR) methods, which were carried out with the help of the Matlab/Simulink® platform. These controllers were designed from a mathematical model obtained in state space. Since not all variables required for feedback are physically measured, a state observer was also implemented. From this, a test consisting of simulation and experiment was executed to validate the proposed mathematical model and compare the performance of the controllers stabilizing the rod. Finally, the performances of the controllers were compared by graphical analysis. The results indicated that both controllers were able to stabilize the Pendulum rod in the vertical position, despite angular variations applied to the equipment arm. Oscillatory characteristics were also identified in the system response for the two controllers.

Keywords: Furuta Pendulum. Pole Placement. Linear Quadratic Regulator (LQR).

1 INTRODUÇÃO

O Pêndulo Invertido Rotacional foi desenvolvido por Katsuhisa Furuta e sua equipe em 1992, como uma ferramenta didática para o estudo de técnicas de controle (FURUTA *et al.*, 1992). Um diagrama esquemático do equipamento desenvolvido neste trabalho está indicado na Figura 1. Esse tipo de Pêndulo é formado por um braço horizontal, que possui um motor acoplado em uma de suas extremidades, cuja finalidade é gerar o movimento de rotação do conjunto. Desta forma, o motor é responsável por controlar o ângulo do braço, $\theta_1(t)$, que é definido em torno do eixo Z, mostrado na figura. Na outra extremidade do braço posiciona-se uma haste articulada que oscilará com ângulo $\theta_2(t)$, em torno do eixo Z_2 , executando a função de pêndulo.

Figura 1 - Diagrama esquemático do Pêndulo Furuta.



Fonte: Dos autores.

Esta montagem, portanto, apresenta duas juntas rotacionais que definem o número de graus de liberdade do sistema, contendo apenas uma entrada de controle. O principal desafio inerente a este sistema mecânico consiste em estabilizar a haste acima de seu eixo de rotação, na posição vertical. Dessa forma, o Pêndulo é mantido em equilíbrio em torno do ponto de operação instável (autoequilíbrio). O Pêndulo Furuta também se destaca por ser um sistema

multivariável, subatuado e por apresentar características dinâmicas não lineares (FU e LIN, 2005). Devido a essas características, a estabilização do sistema na posição vertical tornou-se um problema clássico na área de controle e, desde a sua concepção, tem motivado o desenvolvimento de diversas pesquisas nesta área (ALVES *et al.*, 2022; HAZEM *et al.*, 2020). Somado a isto, o Pêndulo Furuta se assemelha a problemas de grande relevância para a indústria e para a sociedade, como a estabilização do lançamento de foguetes e a modelagem de edifícios para o estudo de abalos sísmicos.

Os parâmetros construtivos do equipamento estão indicados na Tabela 1. Nesta tabela, também estão listados os parâmetros do motor (L_m , R_m e K_m), os quais foram obtidos mediante experimentos, tendo seus resultados apresentados em artigo aceito para publicação (ALVES *et al.*, 2021).

Tabela 1 - Parâmetros construtivos do Pêndulo Furuta.

Símbolo	Descrição	Valor
\hat{J}_0	Momento de inércia do eixo do braço	$1,4064 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$
\hat{J}_2	Momento de inércia do eixo da haste	$2,3031 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$
b_1	Coeficiente de amortecimento do braço	$2,6931 \cdot 10^{-5} \text{ N.m.s/rad}$
b_2	Coeficiente de amortecimento da haste	$1,3823 \cdot 10^{-5} \text{ N.m.s/rad}$
g	Aceleração da gravidade	$9,81 \text{ m/s}^2$
m_1	Massa do braço	$0,0248 \text{ kg}$
m_2	Massa da haste	$0,0171 \text{ kg}$
L_1	Comprimento do braço	$0,17 \text{ m}$
L_2	Comprimento da haste	$0,20 \text{ m}$
l_1	Metade do comprimento do braço	$0,085 \text{ m}$
l_2	Metade do comprimento da haste	$0,10 \text{ m}$
L_m	Indutância da armadura do motor	$4,2380 \cdot 10^{-4} \text{ H}$
R_m	Resistência da armadura do motor	$1,965 \text{ } \Omega$
K_m	Constante do motor	$0,05178 \text{ V.s/rad}$

Fonte: Dos autores.

2 MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático do Pêndulo Furuta, protótipo mostrado na Figura 2, consiste numa relação matemática entre todas as variáveis e parâmetros do equipamento. Para obtê-la, neste trabalho foi utilizado a formulação Lagrangiana, contemplando as forças generalizadas, termos de dissipação de

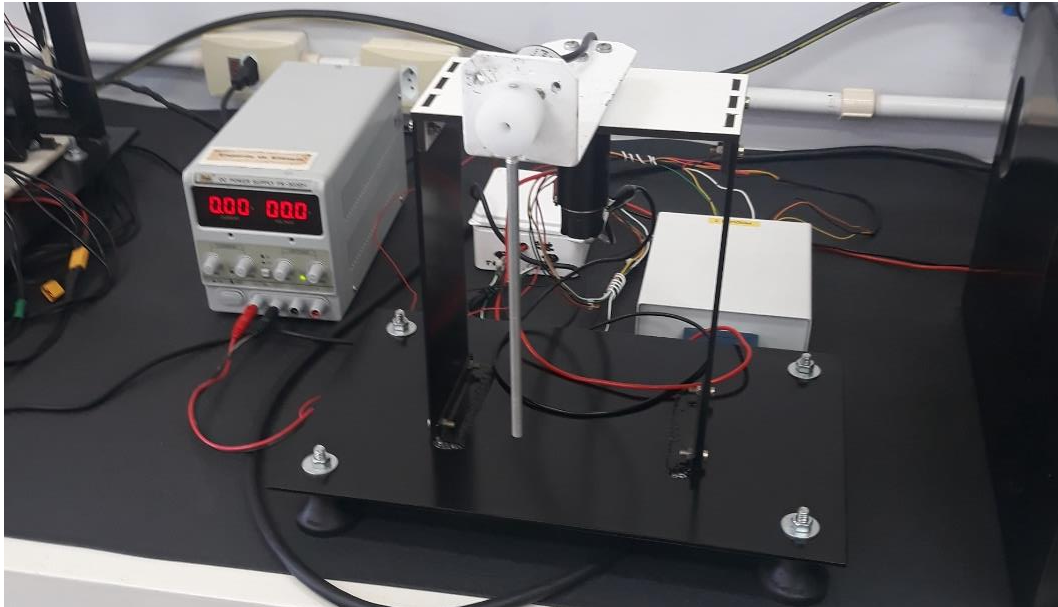
energia do sistema e considerando o acionamento do sistema por um motor elétrico de corrente contínua (CAZZOLATO e PRIME, 2011). Após o levantamento do modelo (PIVOVAR, 2022), foi utilizado o método de discretização por invariância ao degrau, com o período de amostragem de $T_s = 0,02s$ para se obter um modelo em tempo discreto.

A dinâmica do sistema é descrita em (1), na qual considera-se como entrada de controle $u(k)$ a tensão aplicada ao motor; como saídas medidas e , $y_1(k)$ e $y_2(k)$ os ângulos do braço e da haste, respectivamente; e como saída controlada $z_1(k)$, o ângulo do braço.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0,0010 & 0,0199 & 0 & 0,0001 \\ 0 & 1,0157 & -0,0001 & 0,0198 & 0,0001 \\ 0 & 0,0959 & 0,9937 & -0,0008 & 0,0025 \\ 0 & 1,5664 & -0,079 & 0,9871 & 0,0032 \\ 0 & -0,0025 & -0,0262 & 0 & -0,0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0,0012 \\ 0,0015 \\ 0,1188 \\ 0,1488 \\ 0,5056 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,0456 & 0,0573 \\ 0,0573 & 0,9348 \\ 4,5580 & 5,7114 \\ 5,7114 & 93,2669 \\ -0,1188 & -0,1488 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(k) \\ d_2(k) \end{bmatrix}, \quad (1) \\ z_1(k) &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k) \ x_4(k) \ x_5(k)]^T, \\ \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{bmatrix} [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k) \ x_4(k) \ x_5(k)]^T, \end{aligned}$$

em que, $x_1(k)$ corresponde ao ângulo do braço, $x_2(k)$, ao ângulo da haste, $x_3(k)$ e $x_4(k)$, às velocidades angulares do braço e da haste, respectivamente, e $x_5(k)$, à corrente no motor, todos amostrados nos instantes kT_s , $d_1(k)$ e $d_2(k)$ representam torques externos atuando no equipamento (distúrbios), também medidos nos instantes kT_s .

Figura 2 - Protótipo do Pêndulo Furuta.



Fonte: Dos autores.

3 CONTROLADORES

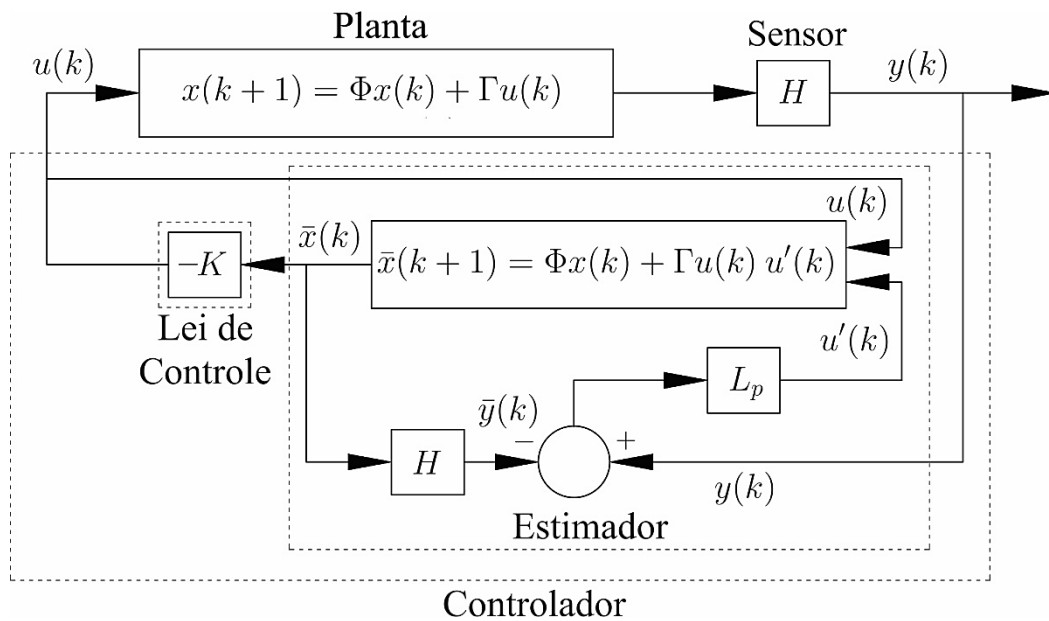
O projeto da lei de controle por realimentação de estado assume que as variáveis de estado da planta, $x(k)$, são mensuráveis e estão disponíveis para realimentação. No entanto, esta condição nem sempre é atendida, nestes casos o projeto do controlador pode considerar a uso de um estimador de estado para estabelecer uma lei de controle utilizando variáveis estimadas, $(\bar{x}(k))$, para realimentação do sistema (FRANKLIN *et al.*, 1998). A estrutura do estimador utilizado neste trabalho, que integra o projeto do controlador (ganho K) com o projeto do estimador (ganho L_p), está indicada na Figura 3.

A dinâmica do estimador referente à estrutura mostrada na Figura 3 é dada por:

$$\bar{x}(k+1) = \Phi\bar{x}(k) + \Gamma u(k) + L_p[y(k) - H\bar{x}(k)], \quad (2)$$

em que Φ, Γ e H , são matrizes da planta do sistema em tempo discreto, $y(k)$, é a saída medida do sistema e L_p , a matriz de ganho do estimador.

Figura 3 - Sistema de controle com estimador de estado.



Fonte: Dos autores.

Observe que a lei de controle $u(k) = -K\bar{x}$ é utilizada para gerar o sinal de controle que realimenta a planta, mas também é utilizado no cálculo do estado estimado, $(\bar{x}(k))$. Além disso, o estimador utiliza o erro entre a saída medida da planta, $(y(k))$, e de seu modelo interno, $(\bar{y}(k))$, para a correção da estimação.

A fim de obter as matrizes de ganho, K e L_p , foi utilizado o método de Alocação de Polos, a partir do qual uma matriz de ganho apropriada pode ser obtida em função dos polos em malha fechada desejados para o sistema, localizados em qualquer posição do plano complexo. Para tanto, é necessário que o sistema seja de estado completamente controlável (OGATA, 2010). Em suma, a matriz K , em $u(k) = -Kx(k)$, é obtida igualando-se a equação característica do sistema com o polinômio característico, definido pelos polos selecionados $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ de acordo com (OGATA, 2010):

$$\text{Det}[zI - \phi + \Gamma K] = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_n). \quad (3)$$

A efeito de comparação dos resultados, também foi utilizada a técnica de controle por Regulador Quadrático Linear (LQR). Esta técnica pertence ao grupo

de controladores conhecido como controle ótimo, que envolve o projeto de controle para sistemas dinâmicos multivariáveis que buscam a minimização de um determinado índice de desempenho (ABREU *et al.*, 2008). Neste caso, busca-se a minimização do índice de desempenho quadrático, J , que em tempo discreto é dado por (FRANKLIN *et al.*, 1998):

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k), \quad (4)$$

sendo Q a matriz de ponderação do vetor de estado do sistema e R a matriz de ponderação do sinal de controle.

Utilizando a lei de controle $u(k) = -K x(k)$ o índice dado pela Equação (4) é minimizado calculando-se o ganho K pela equação (FRANKLIN *et al.*, 1998)

$$K = (R + \Gamma^T S \Gamma)^{-1} \Gamma^T S \phi, \quad (5)$$

cujo termo S , é encontrado resolvendo-se a equação de Riccati associada ao caso discreto:

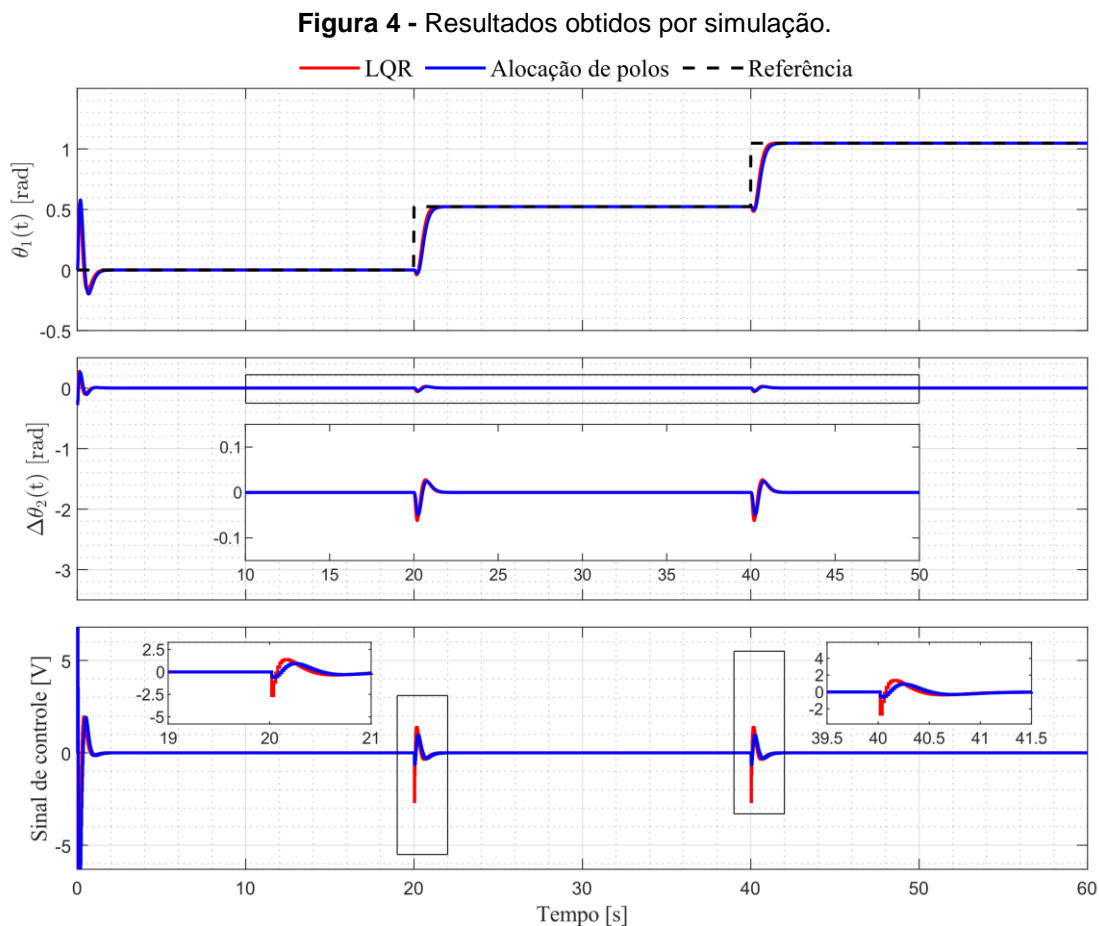
$$S = \phi^T [S - S \Gamma (R + \Gamma^T S \Gamma)^{-1} \Gamma^T S] \phi + Q. \quad (6)$$

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A validação do modelo matemático deste trabalho, bem como a comparação de desempenho dos controladores propostos foram realizadas mediante simulação e experimento com o protótipo mostrado na Figura 2. Na simulação foi aplicada uma condição inicial para a haste igual a $\Delta\theta_2(t) = -\pi/12$ rad, em torno da posição de equilíbrio, $\theta_2(t) = \pi$ rad, e demais variáveis nulas. Em relação ao experimento, vale mencionar que a haste foi levada manualmente do ponto de equilíbrio estável $\theta_2(t) = 0$ até a posição invertida, antes do controlador ser acionado. O ângulo do braço, $\theta_1(t)$, por sua vez, foi conduzido a seguir a seguinte referência:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 20, \\ \frac{\pi}{6} \text{ rad} & 20 \leq t < 40, \\ \frac{\pi}{3} \text{ rad} & 40 \leq t. \end{cases} \quad (7)$$

Na Figura 4 são apresentados os resultados simulados de $\theta_1(t)$, $\Delta\theta_2(t)$ e do sinal de controle, enquanto na Figura 5 são mostrados os resultados obtidos na planta real do Pêndulo Furuta.



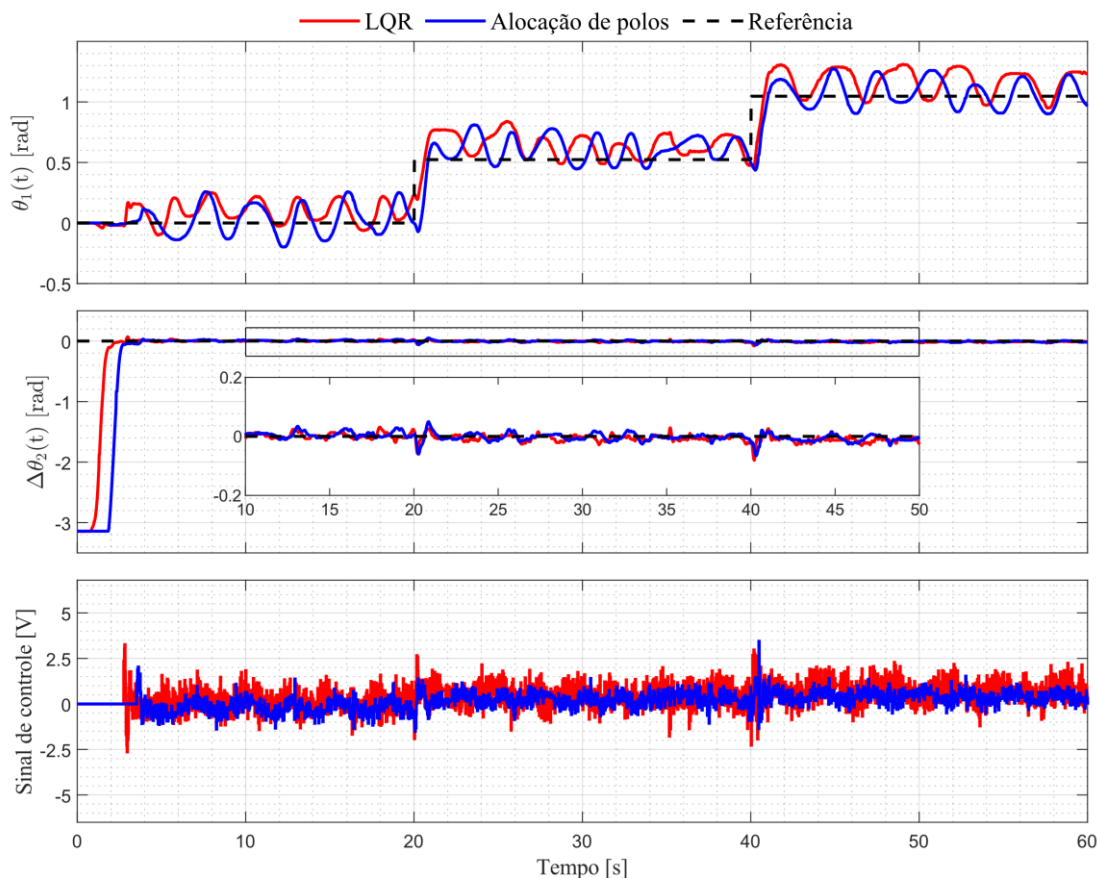
Fonte: Dos autores.

Como é possível observar nas Figuras 4 e 5, tanto o controlador por Alocação de Polos quanto LQR foram capazes de estabilizar a haste na posição invertida ($\theta_2(t) = \pi$ rad) e fazer o braço seguir a referência desejada definida pela Equação (6), com características de resposta bem semelhantes entre os controladores. Uma diferença significativa entre os controladores foi observada no gráfico do sinal de controle em simulação, em que foram atestados valores consideravelmente maiores para o controlador por LQR. Esta diferença, no entanto, não foi observada no gráfico experimental.

Também foi possível observar uma resposta oscilatória no gráfico experimental da Figura 5, com amplitudes de oscilação similares entre os

controladores. Tal oscilação, pode ser justificada pela dinâmica não linear em conjunto com as imperfeições e ruídos presentes na medição do sistema.

Figura 5 - Resultados obtidos por experimento.



Fonte: Dos autores.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentados os resultados do projeto de controle de um Pêndulo Furuta, utilizando os métodos de Alocação de Polos e LQR. A partir de simulação, constatou-se que ambos os controladores foram capazes de estabilizar a haste e fazer o braço seguir a referência estabelecida. Partindo de tal referência, foi realizado um experimento com um protótipo que ressaltou a capacidade dos controladores em estabilizar a haste do equipamento. Entretanto, neste caso foi observada uma resposta oscilatória com características semelhantes de amplitude para os dois controladores. Em trabalhos futuros, pretende-se aplicar um controlador não linear que tenha a

capacidade de levar a haste da posição de equilíbrio estável $\theta_2(t) = 0$ para o ponto de operação $\theta_2(t) = \pi$ rad.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Instituto Federal do Paraná e a Universidade Tecnológica Federal do Paraná, pelo suporte no desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- ABREU, I. S.; FONSECA, J. V.; SILVA, O. F. **Controle Inteligente LQR Neuro-Genético para Alocação de Autoestrutura em Sistemas Dinâmicos Multivariáveis**. 2008. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.
- ALVES, U. N. L. T.; BREGANON, Ricardo; BARBARA, G. V.; ALMEIDA, J. P. L. S.; PIVOVAR, L. E.; MENDONÇA, M.; PALACIOS, R. H. C.; MARTINS, L. F. B. Discrete-time modelling and state feedback control of a dc motor with inertial load. **Journal of Applied Research and Technology**, 2021.
- ALVES, U. N. L. T.; BREGANON, Ricardo; PIVOVAR, L. E.; ALMEIDA, J. P. L. S.; BARBARA, G. V.; MENDONÇA, M.; PALACIOS, R. H. C. Discrete-time \mathcal{H}_∞ integral control via LMIs applied to a Furuta pendulum. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Springer, v. 33, n. 3, p. 1–12, 2022.
- CAZZOLATO, B. S.; PRIME, Z. On the dynamics of the Furuta pendulum. **Journal of Control Science and Engineering**, Hindawi, v. 1, p. 8, 2011.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. **Digital Control of Dynamic Systems**. 3. ed. Stanford, California: Addison-Wesley, 1998.
- FU, Y.-C.; LIN, J.-S. Nonlinear backstepping control design of the Furuta pendulum. In: IEEE. **Proceedings of 2005 IEEE Conference on Control Applications**. Toronto, Canada, 2005. p. 96–101.
- FURUTA, K.; YAMAKITA, M; KOBAYASHI, S. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 206, n. 4, p. 263–269, 1992.
- HAZEM, Z. B.; FOTUHI, M. J.; BINGÜL, Z. Development of a Fuzzy-LQR and Fuzzy-LQG stability control for a double link rotary inverted pendulum. **Journal of the Franklin Institute**, Elsevier, v. 357, n. 15, p. 10529–10556, 2020.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo, Brasil: Pearson Education do Brasil, 2010.

PIVOVAR, L. E. **Construção, Modelagem E Controle Por Alocação Depolos E Regulador Quadrático Linear (LQR) De Um Pêndulo Furuta**. 109 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2022.

Edição especial – Simpósio de Engenharia de Controle e Automação - SIMECA - IFPR

Enviado em: 27 nov. 2022

Aceito em: 30 nov. 2022

Editor responsável: Mateus das Neves Gomes