


CONTROLE SEGUIDOR DE REFERÊNCIA VIA LMIs DE UM SISTEMA AEROPÊNDULO

INTEGRAL CONTROL VIA LMIs OF AN AEROPENDULUM SYSTEM

Hugo Fernando Yamanaka¹ Carlos Alexandre de Souza Bispo² Fernando Sabino Fontequê Ribeiro³ João Paulo Lima Silva Almeida⁴ Ricardo Breganon⁵ Uiliam Nelson Lenzion Tomaz Alves⁶ 

Resumo: Com os avanços nas ferramentas e pacotes computacionais, tornou-se possível a implementação de técnicas de controle poderosas na busca por soluções para os mais diversos problemas encontrados na engenharia. Uma dessas ferramentas disponíveis para o projeto de controladores são as Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*). Neste sentido, este trabalho apresenta a identificação e o controle seguidor baseado em Desigualdades Matriciais Lineares de um sistema Aeropêndulo. Este sistema consiste em um conjunto haste-motor-hélice acoplado a um eixo rotacional, onde o deslocamento angular da haste acontece devido a força de empuxo do conjunto motor-hélice, sendo o conjunto motor-hélice o responsável por levar a haste até o ângulo desejado. Um modelo linear do sistema foi obtido através de ensaios em malha aberta, na vizinhança de um ponto de operação, utilizando a ferramenta de identificação 'ident' do software Matlab®. Posteriormente, projetou-se um controlador seguidor, onde os ganhos de realimentação e do integrador foram encontrados através de LMIs, utilizando o solver LMILAB em conjunto com a toolbox Yalmip no software Matlab®, de modo a garantir um bom desempenho do controlador projetado. Os resultados de simulação e de experimentos são apresentados ao longo deste trabalho.

Palavras-chave: Aeropêndulo, Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), Identificação de Sistemas Dinâmicos, Controle Seguidor.

¹ Discente do curso de Engenharia de Controle e Automação, IFPR, Jacarezinho, Paraná, hugofernandoyamanaka@gmail.com.

² Discente do curso de Engenharia de Controle e Automação, IFPR, Jacarezinho, Paraná, carlosalexandrehk@gmail.com.

³ Mestre em Engenharia Mecânica, IFPR, Jacarezinho, Paraná, fernando.ribeiro@ifpr.edu.br.

⁴ Doutor em Engenharia Elétrica e Informática Industrial, IFPR, Jacarezinho, Paraná, joao.almeida@ifpr.edu.br.

⁵ Doutor em Engenharia Mecânica, IFPR, Jacarezinho, Paraná, ricardo.breganon@ifpr.edu.br.

⁶ Doutor em Engenharia Elétrica, IFPR, Jacarezinho, Paraná, uiliam.alves@ifpr.edu.br.

Abstract: Due to advances in tools and computational packages, it became possible to implement powerful control techniques in the search for solutions to the most diverse problems encountered in engineering. One of these tools available for controller design is the Linear Matrix Inequalities (LMIs). In this sense, this work presents the identification and integral control, based on Linear Matrix Inequalities, of an aeropendulum system. The aeropendulum system consists of a rod-motor-propeller set coupled to a rotational axis, where the angular displacement of the rod happens due to the thrust force generated by the motor-propeller set. Thus, the motor-propeller set drives the rod to the desired angle. A linear model of the system was obtained through open loop tests in the vicinity of the operating point, using the toolbox 'ident' of the Matlab® software. Subsequently, an integral controller was designed, where the feedback and integrator gains were found through LMIs, solved using the LMILAB solver with the Yalmip toolbox in the Matlab® software, to guarantee a good performance of the designed controller. Simulation and experiment results are presented throughout this work.

Keywords: Aeropendulum, Linear Matrix Inequalities (LMIs), Dynamic System Identification, Integral Control.

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas modernos de controle estão cada vez mais sofisticados devido à necessidade de se realizar tarefas complexas e de alta precisão. Desta forma, faz-se necessário a utilização de ferramentas computacionais poderosas, como o *software* Matlab®, para projetar controladores (OGATA, 2010).

O Aeropêndulo é um sistema dinâmico que consiste em uma variação do pêndulo invertido, o qual também possui uma dinâmica não linear. Para se projetar um controlador, em alguns casos, o modelo deste sistema é linearizado em torno de um ponto de operação (OGATA, 2010; ENIKOV e CAMPA, 2012; JOB e JOSE, 2015).

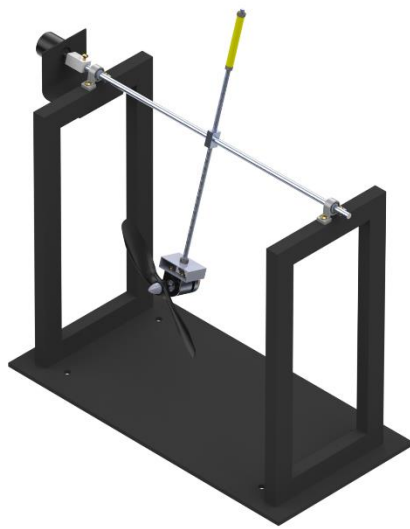
Neste trabalho é apresentada a identificação de um modelo linearizado em torno de um ponto de operação de um Aeropêndulo. As características construtivas do sistema são apresentadas na Tabela 1, e na Figura 1 (a) é apresentado o projeto do protótipo desenvolvido utilizando o *software* SolidWorks®. Este protótipo encontra-se presente no Laboratório de Automação e Controle do Instituto Federal do Paraná (IFPR) – Jacarezinho (Figura 1 (b)). O modelo do sistema foi encontrado através da ferramenta de identificação ‘*System Identification*’ ou ‘*ident*’ do *software* Matlab®. Um controlador seguidor foi projetado usando a teoria das Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) para encontrar os ganhos da realimentação e do integrador, a fim de estabilizar o conjunto, garantir um bom desempenho e seguir uma trajetória desejada.

Tabela 1 - Características construtivas do protótipo.

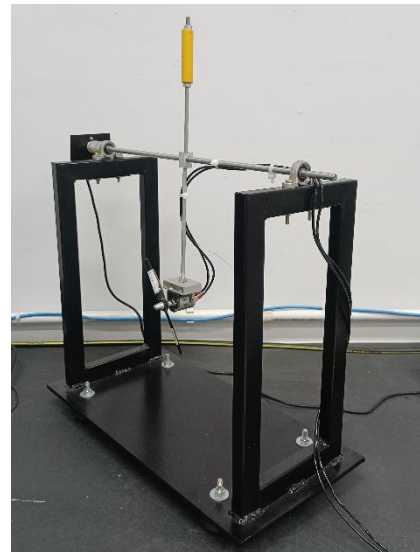
Símbolo	Descrição	Valor
L_1	Haste do pêndulo	205 mm
L_2	Haste do contrapeso	190 mm
L_{cp}	Comprimento do contrapeso	70 mm
m_{cp}	Massa do contrapeso	57,33 g
m_p	Massa do conjunto do pêndulo	118,27 g
F_T	Força de empuxo	-

Fonte: Yamanaka *et al.* (2022).

Figura 1 - (a) Projeto do Aeropêndulo e (b) Planta experimental.



(a)

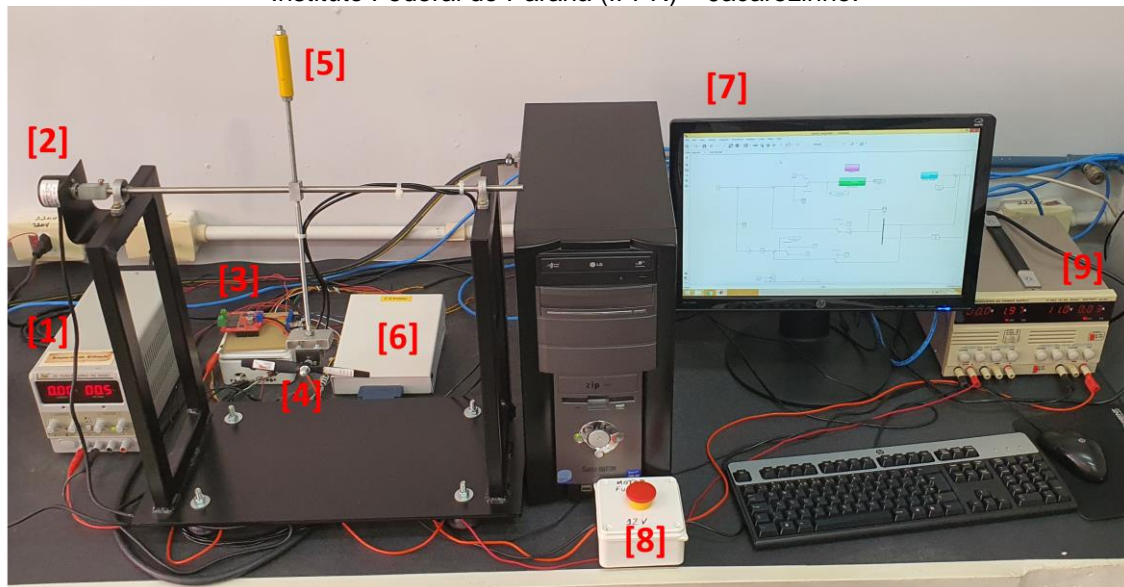


(b)

Fonte: Yamanaka *et al.* (2022).

O protótipo desenvolvido é mostrado na Figura 2, na qual os componentes estão identificados por números. A fonte 5 V [1] é a responsável por energizar o *encoder* rotacional incremental LPD 3806-600BM-G5-24C, com 600 PPR (Pulsos Por Revolução) [2], é o responsável por indicar a posição da haste durante o funcionamento do sistema Aeropêndulo. Para o acionamento do conjunto propulsor motor-hélice, utilizou-se um motor de tensão 12 V, corrente contínua, potência de 4,85 W, torque de 53 gf.cm e rotação nominal de 12500 rpm, o sinal PWM (do inglês *Pulse Width Modulation*) é fornecido por uma placa de aquisição para uma ponte H *Monster Motor Shield VNH3ASP30* com capacidade de corrente de 30 A [3], que converte esse sinal de PWM em tensão, para o acionamento do motor. A rotação do motor permite que a hélice de 6"x3,5 [4] gere a força responsável por realizar o movimento angular do sistema. O contrapeso instalado para reduzir a força de empuxo necessária para o movimento é indicado por [5].

Figure 2 - Protótipo de Aeropêndulo construído no Laboratório de Automação e Controle do Instituto Federal do Paraná (IFPR) – Jacarezinho.



Fonte: Yamanaka *et al.* (2022).

Ainda com relação ao protótipo mostrado na Figura 2, a ponte H e o *encoder* são conectados a uma placa de aquisição de dados da fabricante *National Instruments®*, modelo PCI-6602, por meio de um bloco de conectores [6]. Desta forma, esta placa de aquisição é responsável por ler o ângulo da haste, fornecendo esta informação ao *software* de controle, e enviar o sinal PWM calculado para a ponte H.

É utilizado um computador Intel Core 2 Duo E8600 3,33 GHz, com 2 GB de RAM para o controle do sistema [7]. O acionamento e a aquisição de dados são realizados no *software* Matlab/Simulink®. Foi instalado um botão de emergência no sistema, para garantir a segurança da operação em caso de comportamento inesperado do sistema [8]. Por fim, o conjunto propulsor é alimentado por uma fonte 12 V de corrente contínua [9].

2 IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA

Existem duas formas de se obter o modelo matemático de um sistema, por meio das leis físicas que regem o dado sistema (OGATA, 2010), ou por identificação (LJUNG, 2014). Na identificação, através dos sinais de entrada e

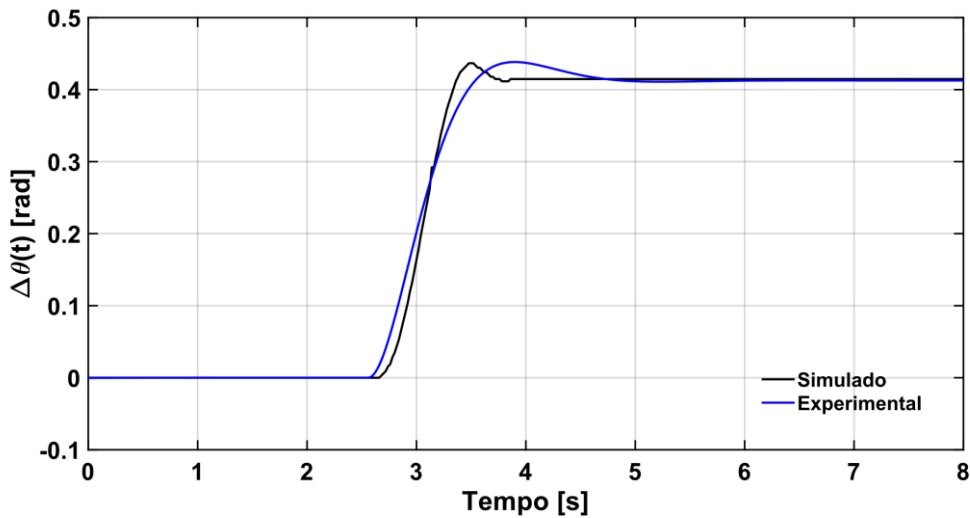
saída encontra-se um modelo que represente os aspectos essenciais do sistema (LJUNG, 2014; COELHO e COELHO, 2016). Na identificação do sistema Aeropêndulo realizada neste trabalho, utilizou-se a ferramenta de identificação ‘*System Identification*’ ou ‘*ident*’ do *software* Matlab®. Essa ferramenta computacional proporciona a obtenção de diferentes representações matemáticas, em tempo contínuo ou discreto, a partir de dados reais de entrada e saída do sistema (LJUNG, 2014).

Para a identificação do sistema, utilizou-se uma entrada do tipo degrau. Desta forma, o sistema foi aproximado em um ponto de operação (COELHO e COELHO, 2016). Logo adotou-se um ponto de operação, o ângulo θ_0 , que corresponde ao sinal de controle u_0 [PWM]. Iniciou-se o sistema com um sinal PWM de $u_0 = 0,5$, que gerou um empuxo na hélice fixada ao motor de corrente contínua, e ocasionou a movimentação do conjunto para a condição inicial desejada $\theta_0 = 0,421$ rad (BISPO *et al.*, 2022). Em seguida, esperou-se a estabilização do sistema, e o valor obtido pelo *encoder* foi ajustado para que o ponto de operação fosse $\theta(t) - \theta_0(t) = \Delta\theta(t) = 0$ rad.

Após isto, o sistema foi submetido a uma mudança na entrada do tipo degrau, em PWM, de forma que $u(t) - u_0(t) = \Delta u(t) = 0,2$, fosse a entrada do sistema, e novamente esperou-se a acomodação do sistema, realizando a leitura do *encoder*, sendo a variação do movimento angular $\Delta\theta(t) = \theta(t) - \theta_0$, a saída do sistema. A partir disto, com a curva de reação do sistema, apresentado na Figura 3, e com o auxílio da ferramenta ‘*ident*’ do *software* Matlab®, obteve-se a função de transferência de segunda ordem do modelo linearizado. Esta função de transferência é mostrada em (1) e apresentou uma aproximação estimada de 93,48% em relação ao sinal obtido pelo sistema real. O sinal de entrada na função de transferência é formado pela transformada de Laplace da variação do sinal PWM, $\Delta U(s)$, e a saída, pela transformada de Laplace da variação do ângulo de resposta, $\Delta\theta(s)$.

$$\frac{\Delta\theta(s)}{\Delta U(s)} = \frac{20,23}{s^2 + 4,147 s + 9,806} \quad (1)$$

Figure 3 - Curva de reação do sistema real e do simulado por meio do modelo obtido pela identificação.



Fonte: elaborado pelos autores.

Utilizando o modelo (1), escolhendo-se x_1 e x_2 como variáveis de estado do sistema, sendo a variação do ângulo da haste em relação ao ponto de operação θ_0 , $x_1 = \Delta\theta(t)$, e $x_2 = d\Delta\theta(t)/dt$ sendo a velocidade angular da haste, obtêm-se a representação em espaço de estados dada por (2), na qual o sinal de controle é $u(t) = \Delta u(t)$, que é variação da entrada em PWM, e a saída é $y(t) = x_1(t) = \Delta\theta(t)$ que é a variação angular do sistema Aeropêndulo em relação a θ_0 .

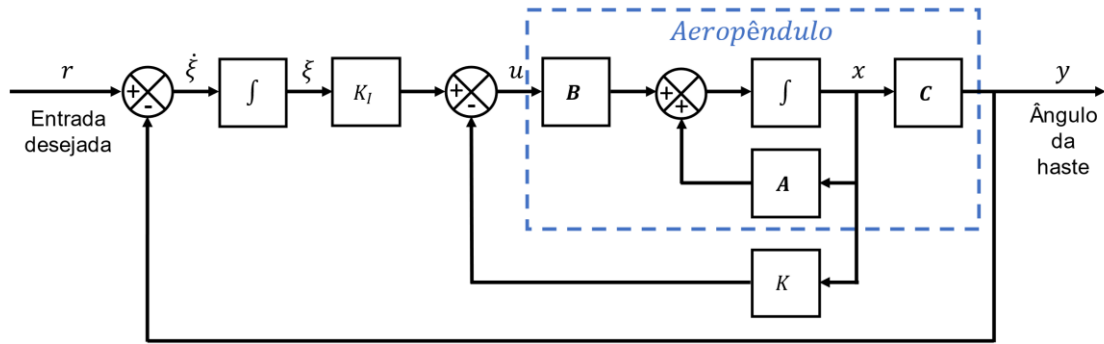
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9,806 & -4,147 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 20,23 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0].$$

3 CONTROLE SEGUIDOR DE REFERÊNCIA VIA LMIs

O controle seguidor, também encontrado na literatura como integrador ou servomecanismo, possui a estrutura de controle apresentado na Figura 4. Considerando que a planta não possua um integrador, é inserido um integrador no ramo direto entre o comparador do erro e a planta (OGATA, 2010).

Figure 4 - Diagrama de blocos do controle seguidor, adaptado de Ogata (2010).



Fonte: elaborado pelos autores.

A partir do diagrama da Figura 4, percebe-se que o sinal de controle é composto por duas partes:

$$u(t) = -Kx(t) + K_I \xi(t) = -[K \quad -K_I] \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Seja uma nova variável de estado $\xi(t)$ com dinâmica $\dot{\xi}(t) = r(t) - y(t)$. Combinando a dinâmica do Aeropêndulo (2) com a dinâmica de $\xi(t)$ pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t). \quad (4)$$

Se o sistema for assintoticamente estável no ponto de operação, então $x(\infty)$, $\xi(\infty)$ e $u(\infty)$ tendem a valores constantes. Assim, em regime permanente,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty). \quad (5)$$

Como $r(t)$ é uma entrada em degrau, $r(\infty) = r(t) = r$ para todo $t > 0$ (ou um tempo suficientemente grande para a estabilização do sistema). Subtraindo (4) de (5), obtém-se

$$\hat{x}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}\hat{u}(t). \quad (6)$$

sendo $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix}$, $x_e(t) = x(t) - x(\infty)$, $\xi_e(t) = \xi(t) - \xi(\infty)$, $\hat{u}(t) = u(t) - u(\infty)$, e, a partir de (2), é possível encontrar as matrizes aumentadas do sistema sendo,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9,806 & -4,147 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20,23 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Sabendo que a estabilidade do sistema (6), faz com que as variáveis $x(t)$, $\xi(t)$ e $u(t)$ tendam a seus valores de referência, e considerando a lei de controle (3) e a dinâmica (6) tem-se, em malha fechada,

$$\dot{\hat{x}}(t) = (\hat{A} - \hat{B}\hat{K})\hat{x}(t), \quad (8)$$

na qual $\hat{K} = [K \quad -K_I]$. O ganho de realimentação \hat{K} pode ser projetado utilizando diferentes teorias de controle.

Neste trabalho a teoria de controle utilizada para garantir a rápida estabilidade do sistema é baseada em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), com o objetivo de estabilizar o sistema no ponto de operação (BOYD *et al.*, 1994; NOGUEIRA, 2016).

Para encontrar os ganhos de realimentação e o ganho do integrador, utilizaram-se as condições apresentadas conforme os teoremas: Teorema 1 apresenta condições para a estabilidade do sistema com taxa de decaimento $\gamma > 0$ e Teorema 2, condições que restringem a norma dos ganhos de realimentação e do integrador.

Teorema 1 (BOYD *et al.*, 1994): considere o sistema descrito pela Equação (8). Caso exista um escalar $\gamma > 0$, uma matriz $M \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tais que

$$XA^T - M^T B^T + XA - MB + 2\gamma X < 0, \quad (9)$$

então a lei de controle (3), sendo $\hat{K} = MX^{-1}$, torna o sistema (8), estável e com taxa de decaimento maior ou igual a γ .

Teorema 2 (ŠILJAK e STIPANOVIC, 2000): assumindo que as condições do Teorema 1 sejam satisfeitas, a restrição $KK^T < \eta^2 \mu I_m$, sendo η e μ constantes positivas, e I_m a matriz identidade de ordem m , é atendida caso as LMIs

$$\begin{bmatrix} \mu I_n & M^T \\ M & I_m \end{bmatrix} > 0 \text{ e } \begin{bmatrix} \eta I_n & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} > 0, \quad (10)$$

sejam satisfeitas, sendo I_n a matriz de ordem n , em conjunto com as LMIs em (9).

Desta forma, consideraram-se as matrizes aumentadas (7), $n = 3$ e $m = 1$, os Teoremas 1 e 2, os parâmetros $\eta = 1800$ e $\gamma = 2,1$, o qual foram encontrados por testes de simulação, utilizando o *software* Matlab® com o *solver*

LMILAB (GAHINET *et al.*, 1994) em conjunto com a *toolbox Yalmip* (LOFBERG, 2004), no projeto do controlador, minimizando o parâmetro μ , obteve-se os seguintes ganhos para a lei de controle (3):

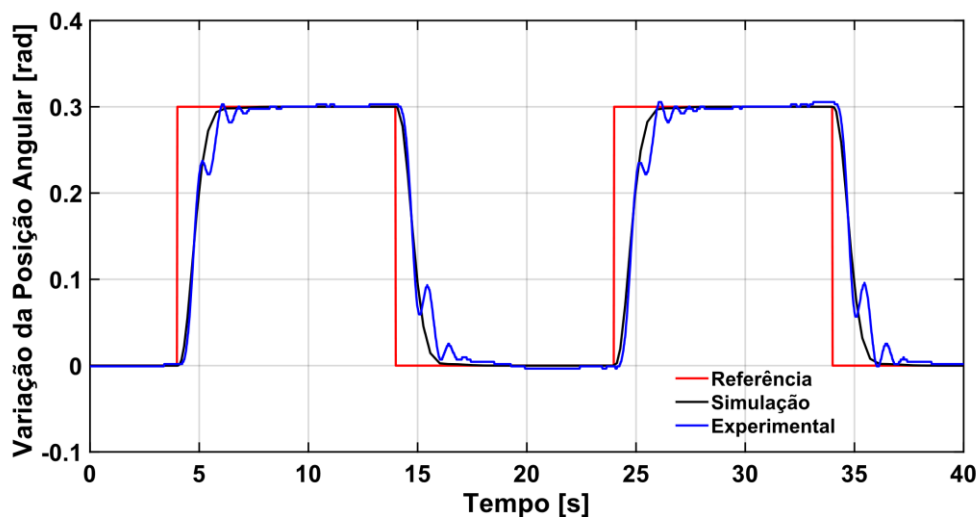
$$\hat{K} = [K \quad | \quad -K_I] = [0,4989 \quad 0,1064 \quad | \quad -1,1501]. \quad (11)$$

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A resposta do sistema Aeropêndulo a uma entrada tipo degrau dada por (11), considerando a simulação e o experimento, é apresentado na Figura 5. Na Figura 6 é apresentado o sinal de controle em PWM, utilizado para estabilizar o sistema e seguir a trajetória desejada. Nota-se que o sinal de controle na simulação e no experimento real apresentam características diferentes, pois no experimental o sistema está sujeito a ruídos e o controlador projetado levou com base na identificação do modelo linearizado em um ponto de operação.

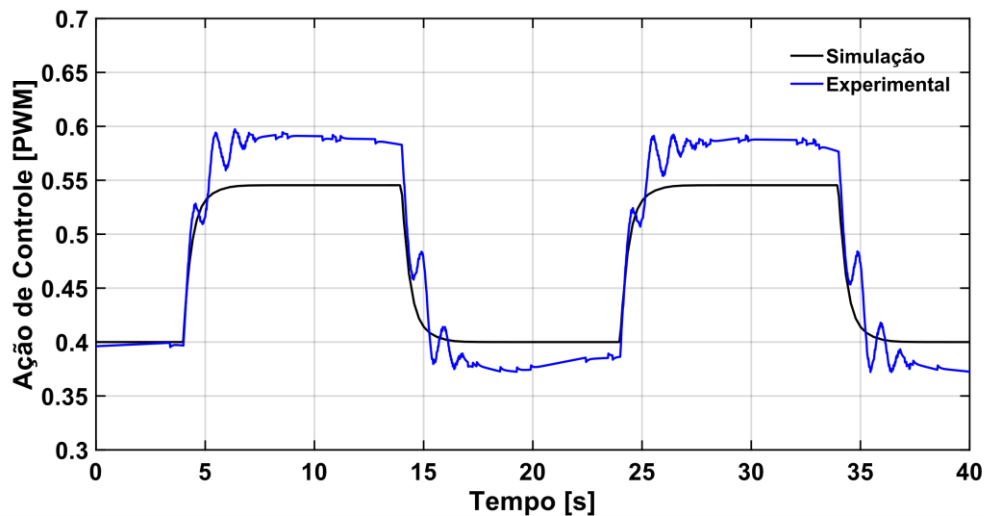
$$r(t) = \begin{cases} 0,3 \text{ rad}, & 4 \leq t \leq 14 \text{ s} \\ 0 \text{ rad}, & 14 < t < 24 \text{ s} \\ 0,3 \text{ rad}, & 24 \leq t \leq 34 \text{ s} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (12)$$

Figura 5 - Resposta do sistema Aeropêndulo com controlador seguidor via LMIs.



Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 6 - Ação de controle do sistema Aeropêndulo com controlador seguidor via LMIs.



Fonte: elaborado pelos autores.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou a identificação do sistema Aeropêndulo através da ferramenta *'ident'*. Posteriormente projetou-se o controlador seguidor usando a teoria da Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), com o objetivo de garantir a rápida estabilidade do sistema, e sinal de controle adequado à implementação. O controlador desempenhou satisfatoriamente os requisitos de projeto, os quais foram a rápida estabilização do sistema (taxa de decaimento – Teorema 1) e adequação do sinal de controle a implementação (restrição na norma do ganho de realimentação – Teorema 2). Em trabalhos futuros outras técnicas podem ser utilizadas para encontrar os ganhos da lei de controle (3), e outros modelos podem ser encontrados usando a modelagem da caixa-branca ou da caixa-preta, a fim de comparar com os resultados deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq e ao Instituto Federal do Paraná, pelo apoio financeiro e pelo suporte no desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- BISPO, Carlos A. S. B.; YAMANAKA, Hugo F.; BREGANON, Ricardo; ALVES, Uiliam N. L. T. Identificação e Controle PID de um Sistema Viga-Hélice. **Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão (ISSN: 2525-4782)**, 2022 (Aceito para publicação).
- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- COELHO, A. A. R.; COELHO, L. S. **Identificação sistemas dinâmicos lineares**. 2 ed. Florianópolis: Editora UFSC, 2016.
- ENIKOV, E. T.; CAMPA, G. Mechatronic aeropendulum: Demonstration of linear and nonlinear feedbackcontrol principles with MatLab/Simulink real-time windows target. **IEEE Transactions on Education, Piscataway**, v. 55, n. 4, p. 538-545, 2012.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. The LMI control toolbox. **Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control**. p. 2038-2041, 1994.
- JOB, M. M.; JOSE, P. S. H. Modeling and control of mechatronic aeropendulum. **International Conference on Innovations in Information, Embedded and Communication Systems (ICIIECS)**. IEEE, p. 1-5, 2015.
- LJUNG, L. **System identification toolbox: User's guide**. Ed. The MathWorks Incorporated, 2014.
- LOFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. **IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)**. IEEE, p. 284-289, 2004.
- NOGUEIRA, Luiz Guilherme Moraes. **Projeto de Controle via LMIs Considerando Saturação no Atuador para uma Suspensão Ativa de Bancada**. 80 f. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP, Ilha Solteira, 2016.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5 ed. São Paulo: Pearson, 2010.
- ŠILJAK, D. D.; STIPANOVIC, Dusan M. Robust stabilization of nonlinear systems: The LMI approach. **Mathematical problems in Engineering**, v. 6, n. 5, p. 461-493, 2000.
- YAMANAKA, Hugo F.; BISPO, Carlos A. S.; BREGANON, Ricardo; RIBEIRO, Fernando S. F.; ALMEIDA, João P. L. S.; ALVES, Uiliam N. L. T. Construção e Controle Seguidor via LQR de um Sistema Aeropêndulo. **Anais do XXIV Congresso Brasileiro de Automática**. Fortaleza – CE: Sociedade Brasileira Automática - SBA, 2022.
Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão. Paranaguá, PR, v.7, n.7, p. 461-1,461-13, 2022.
DOI: 10.21575/25254782rmetg2022vol7n72348

Edição especial – Simpósio de Engenharia de Controle e Automação - SIMECA
- IFPR

Enviado em: 27 nov. 2022

Aceito em: 30 nov. 2022

Editor responsável: Mateus das Neves Gomes