



# FILTRAGEM ÓTIMA PARA SISTEMAS LINEARES NUM CENÁRIO DE FUSÃO DE DADOS

## OPTIMAL FILTERING FOR LINEAR SYSTEMS IN A DATA FUSION SCENARIO

Islane Dutra Pereira Moura <sup>1</sup>   
Gildson Queiroz de Jesus <sup>2</sup> 

**Resumo:** No presente artigo é proposto o desenvolvimento de algoritmos de filtragem para sistemas lineares discretos no tempo num cenário de fusão de dados. O objetivo foi desenvolver filtros ótimos robustos, onde os sistemas são sujeitos a incertezas paramétricas e podem operar sob diferentes condições de falhas. A abordagem utilizada para o desenvolvimento dos filtros ótimos deste trabalho foi baseada em dois métodos de otimização, a saber: o método dos mínimos quadrados regularizados e o método da função penalidade. As estimativas tipo Kalman e as correspondentes equações de Riccati são obtidas, matematicamente, como uma extensão de resultados já conhecidos na literatura. Em seguida, foram realizadas simulações no *Scilab* com o objetivo de verificar a possibilidade dos algoritmos apresentados funcionarem quando estão suscetíveis a diversas condições de falhas. A principal contribuição deste trabalho, foi mostrar que é possível obter filtros ótimos, mesmo quando estes apresentam incertezas paramétricas em todos os parâmetros do sistema e, além disso, estão condicionados a diversos modelos de medidas. Mas para tanto, é necessário utilizar uma técnica denominada fusão de dados, esta por sua vez, possibilita obter informações dos modelos de medidas mesmo quando o sistema está sujeito a falhas. Os resultados obtidos demonstram a eficácia da técnica proposta, pois a mesma permite reduzir significativamente as limitações inerentes ao uso de uma única medida.

**Palavras-chave:** Filtragem. Mínimos quadrados. Incertezas paramétricas. Função penalidade. Fusão de dados.

---

<sup>1</sup>Mestranda em Modelagem Computacional, Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) e lannedutrape@gmail.com.

<sup>2</sup>Doutor em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) e gildsonj@gmail.com.

**Abstract:** In this article, it is proposed to develop filtering algorithms for linear systems, discrete over time in a data fusion scenario. The objective was to develop robust optimum filters, where the systems are subject to parametric uncertainties and can operate under different failure conditions. The approach used to develop the optimum filters in this work was based on two optimization methods, namely: the regularized least squares method and the penalty function method. Kalman-type estimates and the corresponding Riccati equations are obtained, mathematically, as an extension of results already known in the literature. Then, simulations were carried out in *Scilab* in order to verify the possibility of the presented algorithms to work when they are susceptible to several failure conditions. The main contribution of this work was to show that it is possible to obtain optimal filters, even when they present parametric uncertainties in all parameters of the system and, in addition, they are conditioned to several measurement models. But, for this, it is necessary to use a technique called data fusion, which, in turn, makes it possible to obtain information on the measurement models, even when the system is subject to failures. The results obtained demonstrate the effectiveness of the proposed technique, as it allows to significantly reduce the limitations inherent to the use of a single measure.

**Keywords:** Filtering. Least Squares. Parametric Uncertainties. Penalty Function. Fusion of data.

# 1 Introdução

O estudo sobre a teoria de filtragem de sistemas lineares tem sido utilizado em diversas pesquisas envolvendo problemas nas áreas de robótica (MILLS; GOLDENBERG, 1989), economia (QUEIROZ; MEDEIROS; NETO, 2011), processamento de sinais (HASAN; AZIMI-SADJADI, 1995) entre outros. O principal objeto de estudo é o filtro de Kalman composto por um conjunto de equações matemáticas que fundamentam um processo recursivo proporcionando uma minimização do erro médio quadrático, sendo este causado por algum tipo de interferência ambiental ou mesmo problemas de modelagem, estabelecendo uma estimativa ótima do estado do sistema.

Proposto por Rudolf Emil Kalman em 1960 (KALMAN, 1960), o filtro de Kalman, inicialmente foi desenvolvido como uma solução para problemas de filtragem linear de dados em um tempo discreto. Calcula a estimativa filtrada para assim obter o estado do sistema  $x_i$ , baseado na quantidade de medidas  $y_i$  que estão disponíveis. Esse algoritmo foi desenvolvido, a princípio, considerando apenas sistemas lineares discretos no tempo, mas após estudos feitos com o auxílio de Richard S. Bucy, em 1961, o filtro de Kalman tornou-se contínuo no tempo (KALMAN; BUCY, 1961). Dessa forma, esse filtro passou a ser utilizado em diversos problemas e a depender da natureza dos mesmos, assumia várias maneiras de ser aplicado.

Um modelo matemático de um sistema dinâmico é definido através de um conjunto de equações que representa a dinâmica do sistema. O sistema pode ter vários modelos matemáticos que o represente, visto que o modelo matemático não é único. Para que o sistema apresente um bom desempenho é necessário um modelo que descreva o seu comportamento de maneira eficaz. No desenvolvimento deste trabalho, foi utilizado o modelo no espaço de estado. Uma das vantagens do uso desse modelo é a possibilidade do mesmo ser um modelo em sistemas lineares, contínuos e discretos, por exemplo, e geralmente pode ser expresso na forma matricial.

Os algoritmos desenvolvidos neste artigo, são baseados na classe de sistemas lineares discretos no tempo no espaço de estados, onde são considerados filtros que não apresentam perturbações paramétricas e filtros cujas as incertezas estão presentes em todos os parâmetros. Este tipo de representação de sistema é bastante utilizado no estudo da teoria de filtragem.

Um dos principais problemas já descobertos é que os filtros categorizados nessa classe são vulneráveis quando sujeitos a incertezas no sistema, comprometendo de forma significativa a performance e estabilidade do filtro. Uma situação recorrente acontece quando o funcionamento do filtro sofre uma rápida danificação quando as informações do sistema são submetidas a perturbações, mesmo quando o filtro é ótimo. Vários trabalhos podem ser encontrados na literatura que tratam do tema de filtragem Robusta, como pode ser observado

em (D'APPOLITO; HUTCHINSON, 1969), (EINICKE; WHITE, 1999), (SAYED, 2001; XIE; SOH; SOUZA, 1994), (WANG; BALAKRISHNAN, 2002), (ZHOU, 2010), (ISHIHARA; TERRA, 2008), (SHAKED; SOUZA, 1995), (XIONG; WEI; LIU, 2012) e (BERTSEKAS; RHODES, 1971). Vale ressaltar que um importante trabalho neste tema foi desenvolvido em (ISHIHARA; TERRA; CERRI, 2015), que traz o desenvolvimento de filtros ótimos robustos para sistemas considerando incertezas em todos os parâmetros.

Uma outra situação que acaba gerando um mau desempenho na performance do filtro é quando o sistema está sujeito a diferentes condições de falhas. Neste contexto, uma abordagem que tem sido bastante utilizada é a fusão de vários sinais de medidas ou fusão de multi-sensores. Este tema também tem sido tratado em vários trabalhos na literatura, como pode ser visto em (QI; ZHANG; DENG, 2014), (RAN; DENG, 2008), (LEI; DONG-MEI, 2015), (YING, 2007). e (ROOPA; PARIMALA; RAOL, 2016).

Neste trabalho, é proposto uma extensão do filtro robusto desenvolvido em (ISHIHARA; TERRA; CERRI, 2015) para o caso de fusão de vários sinais de medidas. Sendo considerada a abordagem da fusão de dados ponderada e probabilística. O objetivo do trabalho é o desenvolvimento de filtros ótimos para sistemas sujeitos a incertezas em todos os parâmetros do sistema e que possam operar sob diferentes condições de falhas.

## 2 Preliminares

Para atingir os objetivos propostos, inicialmente foi realizada um estudo literário sobre filtros de Kalman e sobre a técnica dos mínimos quadrados regularizados com fusão de dados abordada em (SAYED; AL-NAFFOURI; KAILATH, 2000), este por sua vez apresenta em seu artigo uma formulação e resolução de um problema de estimativa, combinando medidas de maneira robusta através da técnica do mínimos quadrados com dois tipos de fusão, a saber: ponderada e probabilística. Em seguida, foi realizado um estudo sobre o filtro robusto ótimo apresentado em (ISHIHARA; TERRA; CERRI, 2015) que possui incertezas em todos os parâmetros e utiliza a técnica de mínimos quadrados combinado com função penalidade (LUENBERG, 2003). O filtro robusto ótimo abordado neste artigo, é uma extensão do filtro apresentado em (ISHIHARA; TERRA; CERRI, 2015) para o caso de fusão de vários sinais de medidas.

Além disso, foi realizada a implementação computacional deste algoritmo com o propósito de verificar a possibilidade do mesmo funcionar em diversas condições de falhas. Neste trabalho é demonstrado que a utilização do método de função de penalidade combinado

com mínimos quadrados mostra-se muito eficaz no desenvolvimento de filtros robustos recursivo que estão submetidos a diversas condições de falhas.

A seguir será apresentado o problema dos mínimos quadrados robusto com a fusão de dados combinado com o método de função penalidade.

## 2.1 O Problema dos Mínimos Quadrados Robusto com Fusão de Dados

Neste subseção serão discutidas as técnicas dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados utilizadas para a obtenção dos filtros robustos desenvolvidos em (SAYED; AL-NAFFOURI; KAILATH, 2000), para os dois casos de fusão de dados, a saber: o caso ponderado e o caso probabilístico.

### 2.1.1 Fusão Ponderada

Nos processos de filtragem, o principal objetivo é a redução significativa de ruídos presentes na medida de sistemas dinâmicos, obtendo assim uma estimativa ótima para o estado do fenômeno em estudo, de modo que o erro quadrático médio seja minimizado, sendo este a média quadrática entre o valor estimado e o valor real.

Uma estratégia empregada para reverter situações em que o modelo está sujeito a falhas, causando mal desempenho do sistema, é a utilização de uma técnica denominada fusão de dados, que faz uso de diversos modelos de medida, possibilitando ao sistema funcionar em condições de falhas.

A fusão de dados ponderada que faz uso de modelos de medida de forma ponderada, desenvolvida em (SAYED; AL-NAFFOURI; KAILATH, 2000), usa a variância dos ruídos dos modelos como ponderação das diferentes medidas compreendidas no problema de estimação, onde as medidas  $b_k$  surgem de diferentes fontes e quando unidas originam  $\hat{x}$ . Para compreender a ideia da fusão de dados ponderada, considere os modelos de medidas com incertezas paramétricas dados abaixo:

$$b_k = (A_k + \delta A_k)x + v_k, \quad k = 1, \dots, L. \quad (1)$$

sendo,  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  um vetor desconhecido,  $A_k, \delta A_k \in \mathbb{R}^{N \times n}$  é um parâmetro conhecido do problema e sua incerteza, respectivamente,  $b_k \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  são vetores de medida e  $v_k \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  são os ruídos de medida.

Para a expressão (1), é definido  $J(x, \delta A_k, \delta b_k)$ , o funcional do custo quadrático dado por:

$$J(x, \delta A_k, \delta b_k) = \left[ \|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|(A_k x - b_k) + (\delta A_k x - \delta b_k)\|_{W_k}^2 \right]. \quad (2)$$

O valor ótimo de  $x$  que minimiza o funcional é obtido por meio da solução do seguinte problema de otimização:

$$\hat{x} = \arg \min_x \max_{\delta A_k, \delta b_k} \left[ \|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|(A_k x - b_k) + (\delta A_k x - \delta b_k)\|_{W_k}^2 \right]. \quad (3)$$

As incertezas  $\delta A_k, \delta b_k$  são modeladas da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \delta A_k & \delta b_k \end{bmatrix} = G_k \Delta \begin{bmatrix} N_{a,k} & N_{b,k} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

onde,  $\{Q > 0, W_k \geq 0\}$  são as matrizes de ponderação do termo de regularização  $\|x\|_Q^2$  e do resíduo  $v_k$ , respectivamente,  $\delta b_k$  são as incertezas incluídas no problema de forma a considerar as possíveis fontes de distorção nas medições  $b_k$ , além disso,  $G_k, N_{a,k}$  e  $N_{b,k}$  são matrizes cujas dimensões apropriadas conhecidas no problema e  $\Delta$  uma matriz de contração arbitrária, de maneira que  $\|\Delta\| \leq 1$ .

Assim (3) pode ser reescrito como

$$\hat{x} = \arg \min_x \max_{\delta A_k, \delta b_k} \left[ \|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|(A_k x - b_k + y_k)\|_{W_k}^2 \right]. \quad (5)$$

considerando  $y_k = \delta A_k x - \delta b_k$ .

A solução do problema (5) é dada pelo resultado abaixo:

**Lema 2.1.** (SAYED; AL-NAFFOURI; KAILATH, 2000) *O único minimal global  $\hat{x}$  que atende o problema (5) pode ser determinado por:*

$$\hat{x} = \left[ \hat{Q} + \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k \right]^{-1} \left[ \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k b_k + \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k} \right]. \quad (6)$$

sendo as matrizes de ponderação modificadas  $\{\hat{Q}, \hat{W}_k\}$  computadas através das matrizes de

ponderação dadas  $\{Q, W_k\}$  em termos dos escalares  $\hat{\lambda}_k$  como é dado a seguir,

$$\hat{Q} = Q + \sum_{k=1}^L \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}.$$

$$\hat{W}_k = W_k + W_k G_k (\lambda_k I - G_k^T W_k G_k)^{-1} G_k^T W_k. \quad (7)$$

Para isso é necessário determinar os escalares  $\{\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_L\}$  que minimizam a função  $G$ ,

$$G(\lambda_1, \dots, \lambda_L) = \left[ \|x^o\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L C_k(x^o, \lambda_k) \right] \quad (8)$$

nos intervalos  $\lambda_k \geq \|H_k^T W_k H_k\|$ , sendo  $\lambda_k$  um número não negativo. Onde  $x^o$  é definido por,

$$x^o = \left[ \sum_{k=1}^L [M_k(\lambda_k) + \lambda_k N_{a,k}^T N_{a,k}] \right]^{-1} \sum_{k=1}^L [A_k^T W_k(\lambda_k) b_k + N_{a,k}^T N_{b,k}]$$

$$C_k(x^o, \lambda_k) = \|A_k x^o - b_k\|_{W_k(\lambda_k)} + \lambda_k \|N_{a,k} x^o - N_{b,k}\|$$

$$M_k(\lambda_k) = \frac{1}{L} Q + A_k^T W_k(\lambda_k) A_k$$

$$W_k(\lambda_k) = W_k + W_k G_k (\lambda_k I - G_k^T W_k G_k)^{-1} G_k^T W_k. \quad (9)$$

Tem-se que (5) na forma matricial é escrito como,

$$\hat{x} = \arg \min_x \max_{\delta A_k, \delta b_k} \left\{ x^T Q x + \left( \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_L \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_L \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} W_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & W_L \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \left( \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_L \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_L \end{bmatrix} \right) \right\}, \quad (10)$$

Além disso, (6) pode ser escrito na forma matricial conforme descrito abaixo,

$$\hat{x} = \left[ \hat{Q} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_L \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{W}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{W}_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{W}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_L \end{bmatrix} \right]^{-1} \left[ \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_L \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{W}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{W}_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{W}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_L \end{bmatrix} \right] + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} N_{a,1}^T & N_{a,2}^T & \cdots & N_{a,L}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{b,1} \\ N_{b,2} \\ \vdots \\ N_{b,L} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Fazendo as seguintes identificações:

$$\bar{A} := \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_L \end{bmatrix}, \bar{b} := \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_L \end{bmatrix}, \bar{W} := \begin{bmatrix} \hat{W}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{W}_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{W}_L \end{bmatrix},$$

$$\bar{N}_a := \begin{bmatrix} N_{a,1} & N_{a,2} & \cdots & N_{a,L} \end{bmatrix}, \bar{N}_b := \begin{bmatrix} N_{b,1} \\ N_{b,2} \\ \vdots \\ N_{b,L} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Considerando as identificações apresentadas em (12), a expressão (10) recai nos mínimos quadrados padrão como pode ser observado no lema 2.3 e admite como única solução (11), assim, podem ser reescritas, respectivamente, como:

$$\hat{x} = \arg \min_x \max_{\lambda \bar{A}, \lambda \bar{b}} \left\{ \|x\|_Q^2 + \|(\bar{A} + \delta \bar{A})x - (\bar{b} + \delta \bar{b})\|_{\bar{W}_k}^2 \right\}. \quad (13)$$

$$\hat{x} = \left[ \hat{Q} + \bar{A}^T \bar{W} \bar{A} \right]^{-1} \left[ \bar{A}^T \bar{W} \bar{b} + \hat{\lambda} \bar{N}_a^T \bar{N}_b \right]. \quad (14)$$

### 2.1.2 Fusão Probabilística

Diferente da fusão de dados ponderada que utiliza a variância dos modelos de medidas como ponderação, a fusão de dados probabilística desenvolvida em (SAYED; AL-NAFFOURI; KAILATH, 2000) é fundamentada na utilização de um único modelo de medida  $b$ , que é

escolhido dentre vários outros,  $(b_1, b_2, \dots, b_L)$ , através de uma certa cadeia de Markov, ou seja, uma única medida formada pelas mudanças das diferentes fontes é escolhida pela cadeia de Markov com distribuição de probabilidade  $\pi_k$ . A escolha do modelo é feita por meio da mobilidade de uma cadeia de Markov,  $\Theta_i$ . Matematicamente, considere os modelo de medida sujeito a incerteza paramétrica dado abaixo:

$$b = (A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x + v, \Theta_i = k, \quad k = 1, \dots, L, \quad i = 1, \dots, N. \quad (15)$$

sendo,  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  um vetor desconhecido,  $A_{\Theta_i}, \delta A_{\Theta_i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é um parâmetro conhecido do problema e sua incerteza paramétrica, escolhidos dentre as matrizes  $A_k, \delta A_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , respectivamente, por uma cadeia de Markov  $\Theta_i = k$  variante no tempo  $i = 1, \dots, N$  e com distribuição de probabilidade  $\pi_k$ , onde  $k = 1, \dots, L$ ,  $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  é o vetor de medida formado pelos diversos modelos de medida e  $v \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  são os ruídos de medida.

Dessa forma, (15) é definido da seguinte maneira:

$$J(x, \delta A_k, \delta b_k) = E \left[ \|x\|_Q^2 + \|(A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i})\|_W^2 \right], \quad (16)$$

sendo,  $Q > 0$  a matriz de ponderação do termo de regularização  $\|x\|_Q^2$ ,  $W \geq 0$  a matriz de ponderação do resíduo  $v$ .

O funcional (16) pode ser reescrito como

$$J(x, \delta A_k, \delta b_k) = \left[ \|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|(A_k + \delta A_k)x - (b + \delta b_k)\|_{W_{\pi_k}}^2 \right], \quad (17)$$

sendo  $\pi_k$  a distribuição de probabilidade da cadeia de Markov  $\Theta_i = k$ . De fato, aplicando o valor esperado em (16), tem-se:

$$\left[ \|x\|_Q^2 + E \|(A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i})\|_W^2 \right]. \quad (18)$$

Note que,

$$\begin{aligned} & E \{ \|(A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i})\|_W^2 \} \\ &= E \{ ((A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i}))^T W ((A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i})) \} \\ &= E \{ ((A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i}))^T W ((A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i})) \} \mathbf{1}_\Omega \\ &= E \{ ((A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i}))^T W ((A_{\Theta_i} + \delta A_{\Theta_i})x - (b + \delta b_{\Theta_i})) \} \mathbf{1}_{\{\Theta_i=1\} \cup \dots \cup \{\Theta_i=L\}}. \end{aligned}$$

como  $\{\Theta_i = 1\} \cup \dots \cup \{\Theta_i = L\}$  são disjuntos, então observa-se que:

$$\begin{aligned}
 &= ((A_1 + \delta A_1)x - (b + \delta b_1))^T W ((A_1 + \delta A_1)x - (b + \delta b_1)) E\{1_{\{\Theta_i=1\}}\} + \dots \\
 &+ ((A_L + \delta A_L)x - (b + \delta b_L))^T W ((A_L + \delta A_L)x - (b + \delta b_L)) E\{1_{\{\Theta_i=L\}}\} \\
 &= ((A_1 + \delta A_1)x - (b + \delta b_1))^T W ((A_1 + \delta A_1)x - (b + \delta b_1)) \pi_1 + \dots \\
 &+ ((A_L + \delta A_L)x - (b + \delta b_L))^T W ((A_L + \delta A_L)x - (b + \delta b_L)) \pi_L \\
 &= \sum_{k=1}^L \left[ ((A_k + \delta A_k)x - (b + \delta b_k))^T W \pi_k ((A_k + \delta A_k)x - (b + \delta b_k)) \right] \\
 &= \sum_{k=1}^L \|(A_k + \delta A_k)x - (b + \delta b_k)\|_{W \pi_k}^2.
 \end{aligned}$$

Portanto, o funcional (16) pode ser reescrito como (17).

Em (SAYED; AL-NAFFOURI; KAILATH, 2000) o problema dos mínimos quadrados regularizados num cenário de fusão de dados probabilístico, para o caso robusto, é dado por,

$$\hat{x} = \arg \min_x \max_{\delta A_k, \delta b_k} \left[ \|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|(A_k x - b) + (\delta A_k x - \delta b_k)\|_{W \pi_k}^2 \right]. \quad (19)$$

sendo  $y_k = \delta A_k x - \delta b_k$  e as incertezas modeladas da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \delta A_k & \delta b_k \end{bmatrix} = H_k \Delta \begin{bmatrix} N_{a,k} & N_{b,k} \end{bmatrix}.$$

onde,  $\{H_k, N_{a,k}, N_{b,k}\}$  são matrizes e  $\Delta$  é uma matriz de contração.

Assim (19) pode ser reescrito como

$$\hat{x} = \arg \min_x \max_{\delta A_k, \delta b_k} \left[ \|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|(A_k x - b + y_k)\|_{W \pi_k}^2 \right]. \quad (20)$$

Cuja única solução é dada por:

**Lema 2.2.** (SAYED; AL-NAFFOURI; KAILATH, 2000) O único mínimo global  $\hat{x}$  que satisfaz o problema (20) é dado por:

$$\hat{x} = \left[ \hat{Q} + \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k \right]^{-1} \left[ \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k b + \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k} \right]. \quad (21)$$

sendo as matrizes de ponderação modificadas  $\{\hat{Q}, \hat{W}_k\}$  computadas através das matrizes de

ponderação dadas  $\{Q, W\pi_k\}$  em termos dos escalares  $\hat{\lambda}_k$  como é dado a seguir,

$$\hat{Q} = Q + \sum_{k=1}^L \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}$$

$$\hat{W}_k = W\pi_k + W\pi_k H_k (\lambda_k I - H_k^T W\pi_k H_k)^{-1} H_k^T W\pi_k. \quad (22)$$

Tem-se que (20) e (21) podem ser escritos na forma matricial como,

$$\hat{x} = \arg \min_x \max_{\delta A_i, \delta b_i} \left\{ x^T Q x + \left( \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_L \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_L \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \hat{W}\pi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W\pi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & W\pi_L \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \left( \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_L \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_L \end{bmatrix} \right) \right\}, \quad (23)$$

$$\hat{x} = \left[ \hat{Q} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_L \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{W}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{W}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{W}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_L \end{bmatrix} \right]^{-1} \left[ \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_L \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{W}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{W}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{W}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \hat{\lambda}_k \begin{bmatrix} N_{a,1}^T & N_{a,2}^T & \cdots & N_{a,L}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{b,1} \\ N_{b,2} \\ \vdots \\ N_{b,L} \end{bmatrix} \right], \quad (24)$$

Fazendo as seguintes identificações:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_L \end{bmatrix}; \bar{b} = \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}; \bar{\hat{W}} = \begin{bmatrix} \hat{W}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{W}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{W}_L \end{bmatrix}; \bar{W}\pi = \begin{bmatrix} W\pi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W\pi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W\pi_L \end{bmatrix};$$

$$\bar{N}_a = \begin{bmatrix} N_{a,1} & N_{a,2} & \cdots & N_{a,L} \end{bmatrix}; \bar{N}_b = \begin{bmatrix} N_{b,1} \\ N_{b,2} \\ \vdots \\ N_{b,L} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Considerando as identificações expressas em (25), a expressão (23) pode ser reescrita como apresenta pelo Lema 2.3 e assim, recai nos mínimos quadrados padrão e admite como única solução (24), ambas, podem ser reescritas, respectivamente, como:

$$\hat{x} = \arg \min_x \max_{\lambda \bar{A}, \lambda \bar{b}} \|x\|_Q^2 + \sum_{i=1}^L \|(\bar{A} + \delta \bar{A})x - (\bar{b} + \delta \bar{b})\|_{\bar{W}_i}^2, \quad (26)$$

$$\hat{x} = \left[ \hat{Q} + \bar{A}^T \bar{W} \bar{A} \right]^{-1} \left[ \bar{A}^T \bar{W} \bar{b} + \hat{\lambda} \bar{N}_a^T \bar{N}_b \right]. \quad (27)$$

## 2.2 O Problema dos Mínimos Quadrados Combinado com o Método de Função Penalidade

Nesta seção serão apresentados alguns resultados que determinam uma importante relação entre as expressões dos mínimos quadrados e a expressão dada no problema de função penalidade. Esses resultados são abordados de maneira mais detalhada em (BIANCO, 2009).

O lema a seguir considera a otimização de um funcional quadrático que apresenta incerteza paramétricas, determinando equivalência entre as soluções para  $\hat{x}$ . Além disso, admitem solução para o problema dos mínimos quadrados com incertezas paramétricas expressos em (13) e (26).

**Lema 2.3.** (BIANCO, 2009) *As seguintes sentenças são equivalentes*

1.  $\hat{x} \in \arg \min_x \max_{\lambda A, \lambda b} [\|x\|_Q^2 + \|(A + \delta A)x - (b + \delta b)\|_{W_i}^2],$

- 2.

$$\hat{x} = \arg \min_x \left( \begin{bmatrix} I \\ A \\ N_a \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ N_b \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & \hat{W} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda} I \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} I \\ A \\ N_a \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ N_b \end{bmatrix} \right) \quad (28)$$

3.  $(x, \lambda, \gamma) = (\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\gamma})$  é solução do sistema

$$\begin{bmatrix} -Q & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{W} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{\lambda}I & 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & N_a \\ 0 & 0 & 0 & I & A^T & N_a^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \\ N_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Se  $(A^T W A)$  for invertível, então tem-se que  $\hat{x}$  é solução única de 2. Além disso,

$$(A^T W A)^{-1} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -W & I & 0 \\ I & 0 & A \\ 0 & A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (30)$$

A seguir é apresentado o conceito de função penalidade sujeita a restrições lineares de igualdade, cuja demonstração encontra-se presente na tese de doutorado de (BIANCO, 2009) e mais detalhes referente a este resultado pode ser visto em (LUENBERG, 2003).

**Teorema 2.1.** (LUENBERG, 2003) Sejam  $G \in \mathbb{R}^{k \times n}$  e  $V > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Considere o seguinte problema de otimização com restrição

$$\hat{x} = \arg \min_x x^T V^{-1} x, \quad (31)$$

sujeito a

$$Gx = u, \quad (32)$$

sendo que  $u \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ . Associado ao problema com restrição (31)-(32) tem-se o seguinte problema sem restrição

$$\hat{x}(\mu) = \arg \min_x (Gx - \mathcal{B})^T \mathcal{V}^{-1} (Gx - \mathcal{B}), \quad (33)$$

sendo,

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}^{-1}(\mu) = \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_k I \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}, \quad \mu > 0.$$

Então, o limite  $\lim_{\mu_k \rightarrow \infty} \hat{x}(\mu)$  sempre existe e é igual a

$$\lim_{\mu_k \rightarrow \infty} \hat{x}(\mu) = \hat{x}^0, \quad (34)$$

sendo  $\hat{x}^0$  a solução de (58)-(59). Uma expressão para  $\hat{x}(\mu_k)$  é dada por

$$\hat{x}(\mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{V}(\mu) & \mathcal{G} \\ \mathcal{G}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

Além disso, têm-se que

$$\lim_{\mu_k \rightarrow \infty} (\mathcal{G}\hat{x}(\mu) - \mathcal{B})^T \mathcal{V}^{-1} (\mathcal{G}\hat{x}(\mu) - \mathcal{B}) = (x^0)^T V^{-1} x^0. \quad (36)$$

### 3 Formulação do Problema de Filtragem Ótima Robusta para Sistemas no Espaço de Estado num Cenário de Fusão de Dados

Nesta seção será apresentado o desenvolvimento das estimativas robustas ótimas dos filtros de Kalman para Sistemas nos Espaços de Estados utilizando a técnica dos Mínimos Quadrados Regularizados num Cenário de Fusão de Dados Ponderada e Probabilística combinado com a técnica de função penalidade.

#### 3.1 Fusão Ponderada

Considere o seguinte sistema dinâmico com incerteza em todos os parâmetros, ou seja:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i)x_i + (G_i + \delta G_i)w_i, \\ z_{i+1,k} &= (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k})x_{i+1} + (K_{i+1,k} + \delta K_{i+1,k})v_{i+1,k}, \quad i \geq 0 \text{ e } k = 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (37)$$

sendo  $x_i \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estado,  $z_{i+1,k} \in \mathbb{R}^p$  o vetor da medida de saída,  $w_i \in \mathbb{R}^m$  e  $v_{i+1,k} \in \mathbb{R}^p$  os erros de ajuste presentes nas equações de estado e de medida, e  $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $H_{i+1,k} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $G_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $K_{i+1,k} \in \mathbb{R}^{p \times m}$  são assumidas as matrizes conhecidas do sistema. E  $\delta F_i$ ,  $\delta G_i$ ,  $\delta H_{i+1,k}$  e  $\delta K_{i+1,k}$  são denominadas perturbações nos parâmetros do sistema nominal variante no

tempo. As incertezas paramétricas são modeladas por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i \end{bmatrix} &= M_{1,i} \Delta_1 \begin{bmatrix} N_{F_i} & N_{G_i} \end{bmatrix}, \quad \|\Delta_1\| \leq 1, \\ \begin{bmatrix} \delta K_{i+1,k} & \delta H_{i+1,k} \end{bmatrix} &= M_{2,i} \Delta_2 \begin{bmatrix} N_{K_{i+1,k}} & N_{H_{i+1,k}} \end{bmatrix}, \quad \|\Delta_2\| \leq 1, \end{aligned} \quad (38)$$

sendo  $M_{1,i}$ ,  $M_{2,i}$ ,  $N_{F,i}$ ,  $N_{G,i}$ ,  $N_{K_{i+1,k}}$  e  $N_{H_{i+1,k}}$  são matrizes conhecidas,  $\|\Delta_1\| \leq 1$  e  $\|\Delta_2\| \leq 1$ .

Assim, uma solução do problema de otimização que origina um algoritmo recursivo de filtragem, que proporciona uma estimativa ótima ao ser computado a mesma quantidade de medidas e estados para um sistema espaço de estados num cenário de fusão de dados ponderada.

Seja a função custo do sistema (37) dada por:

$$\begin{aligned} J_i := & \left\{ \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ \bar{v}_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{R}_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ \bar{v}_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \right. \\ & + \left( \begin{bmatrix} F_i & G_i & 0 & -I \\ 0 & 0 & \bar{K}_{i+1} & \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \bar{K}_{i+1} & \delta \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right. \\ & \times \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ \bar{v}_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{z}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta F_i \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \left. \right)^T \mu_i \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \\ & \times \left( \begin{bmatrix} F_i & G_i & 0 & -I \\ 0 & 0 & \bar{K}_{i+1} & \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \bar{K}_{i+1} & \delta \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right. \\ & \left. \left. \times \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ \bar{v}_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i} \\ \bar{z}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta F_i \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

$$\text{sendo, } \mu_i \geq 0 \text{ e } \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{i+1} &:= \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}; \quad \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1,1} \\ \vdots \\ z_{i+1,L} \end{bmatrix}; \quad \bar{v}_{i+1} := \begin{bmatrix} v_{i+1,1} \\ \vdots \\ v_{i+1,L} \end{bmatrix} \\ \bar{R}_{i+1} &:= \begin{bmatrix} R_{i+1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i+1,2}^{-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R_{i+1,L}^{-1} \end{bmatrix}; \quad \bar{K}_{i+1} := \begin{bmatrix} K_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{i+1,2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & K_{i+1,L} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (40)$$

Assumindo conhecida a estimativa *a-priori* para cada tempo  $i$  do estado  $x_i$  indicado por  $\hat{x}_{i|i}$ , junto com as observações no tempo  $i + 1$  por  $z$ , atualizando para  $\hat{x}_{i+1|i+1}$ , o problema de

filtragem robusta é encontrar  $\hat{x}_{i+1|i+1}$  que minimize  $J_i$ , considerando o caso de incertezas num cenário de fusão de dados, isto é,

$$\min_{x_i, x_{i+1}} \max_{\delta_i} J_i \quad (41)$$

Considerando as identificações apresentadas em (40) a equação (39) recai no problema de filtragem robusto abordado em (BIANCO, 2009), assim, a estimativa filtrada robusta é dada da seguinte maneira,

**Teorema 3.1.** *Considere o sistema dinâmico (37), o problema de otimização em (41) e as incertezas modeladas em (38). Suponha que:*

$$\begin{bmatrix} I & \overline{H}_{i+1}^T & N_I^T & N_{\overline{H}_{i+1}}^T \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} F_i & G_i & I \\ 0 & \overline{K}_{i+1} & \overline{H}_{i+1} \\ N_{F_i} & N_{G_i} & N_I \\ 0 & N_{\overline{K}_{i+1}} & N_{\overline{H}_{i+1}} \end{bmatrix} \quad (42)$$

seja posto linha pleno para todo  $i$ . Dessa forma, tem-se que as estimativas robustas filtradas  $\hat{x}_{i+1,i+1}$  e sua correspondente equação recursiva de Riccati são dadas por: *Passo 0: (Condições Iniciais)*

$$P_{0|0} := (P_0^{-1} + \overline{H}_0^T \overline{R}_0^{-1} \overline{H}_0)^{-1} \quad (43)$$

$$\hat{x}_{0|0} := P_{0|0} \overline{H}_0^T \overline{R}_0^{-1} \overline{z}_0 \quad (44)$$

onde,

$$\overline{R}_0 := \text{diag} \left[ R_{0,k} \right] \quad (45)$$

*Passo 1: Atualize  $\hat{x}_{i|i}$ ,  $P_{i|i}$  para  $\hat{x}_{i+1|i+1}$ ,  $P_{i+1|i+1}$*

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1,i+1}, P_{i+1,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{\lambda}_i I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{\lambda}_i I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_i^{-1} & 0 & 0 & M_i & \mathcal{F}_i & \mathcal{G}_i & \mathcal{E}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & N_{\mathcal{F}_i} & N_{\mathcal{G}_i} & N_{\mathcal{E}_i} \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & M_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & \mathcal{F}_i^T & N_{\mathcal{F}_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \mathcal{G}_i^T & N_{\mathcal{G}_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_i^T & N_{\mathcal{E}_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathcal{Z}_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (46)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &:= \begin{bmatrix} -I \\ H_{i+1,1} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}; \quad N_{\mathcal{E},i} := \begin{bmatrix} 0 \\ N_{H_{i+1,1}} \\ \vdots \\ N_{H_{i+1,L}} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{F}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \end{bmatrix}; \quad N_{\mathcal{F},i} := \begin{bmatrix} N_{F_i} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad M_i := \begin{bmatrix} M_{1,i} & 0 \\ 0 & M_{2,i} \end{bmatrix}; \\ \mathcal{G}_i &:= \begin{bmatrix} G_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{i+1,1} & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{i+1,1} \end{bmatrix}; \quad N_{\mathcal{G},i} := \begin{bmatrix} N_{G_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_{K_{i+1,1}} & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{K_{i+1,1}} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{R}_i := \begin{bmatrix} Q_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{i+1,1}^{-1} & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{i+1,L}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (47)$$

Além disso, tem-se que:

$$\hat{W}_i = (\Xi_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i M_i^T)^{-1}.$$

para  $\mu > 0$  fixado.

O parâmetro  $\hat{\lambda}_i$  deve satisfazer a seguinte desigualdade  $\hat{\lambda}_i \geq \|M_i^T \Xi_i^{-1} M_i\|$  e minimizar:

$$G(\lambda) = \|x(\lambda)\|_Q^2 + \lambda \|N_A x(\lambda) - N_b\|^2 + \|A_i x(\lambda) - b_i\|_{W(\lambda)}^2.$$

onde as variáveis auxiliares são definidas por:

$$\begin{aligned} x(\lambda) &:= (\mathcal{Q}_i(\lambda) - A_i^T \hat{W}_i(\lambda) A_i)^{-1} (-A_i^T \hat{W}_i(\lambda) b_i + N_{A_i}^T \hat{\lambda}_i N_{b_i}), \\ \mathcal{Q}_i(\lambda) &:= \mathcal{Q}_i + \hat{\lambda} N_{A_i}^T N_{A_i}, \\ \hat{W}_i &:= W_i + W_i H_i (\lambda I - H_i^T W_i H_i)^{-1} H_i^T W_i. \end{aligned}$$

### 3.2 Fusão Probabilística

Considere o sistema (37) para o caso probabilístico, que diferente do apresentado na subseção 3.1, onde as medidas são ponderadas, este consiste na utilização de um único modelo de medida baseado na probabilidade de vários modelos de medidas serem usados, além disso, o sistema apresenta incerteza em todos os parâmetros, assumindo assim a seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i) x_i + (G_i + \delta G_i) w_i, \\ z_{i+1} &= (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k}) x_{i+1} + (K_{i+1,k} + \delta K_{i+1,k}) v_{i+1}, \quad i \geq 0 \text{ e } k = 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (48)$$

sendo  $x_i \in \mathbb{R}^n$  os vetores de estado,  $z_{i+1} \in \mathbb{R}^p$  os vetores da medida de saída,  $w_i \in \mathbb{R}^m$  e  $v_{i+1} \in \mathbb{R}^p$  os erros de ajuste presentes nas equações de estado e de medida, e  $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $H_{i+1,k} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $G_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $K_{i+1,k} \in \mathbb{R}^{p \times m}$  são assumidas as matrizes conhecidas do sistema. E  $\delta F_i$ ,  $\delta G_i$ ,  $\delta H_{i+1,k}$  e  $\delta K_{i+1}$  são denominadas perturbações nos parâmetros do

sistema nominal variante no tempo. As incertezas paramétricas são modeladas por:

$$\begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i \\ \delta K_{i+1,k} & \delta H_{i+1,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,i} & 0 \\ 0 & M_{1,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{F_i} & N_{G_i} \\ N_{K_{i+1,k}} & N_{H_{i+1,k}} \end{bmatrix} \quad (49)$$

sendo  $\|\Delta_1\| \leq 1$  e  $\|\Delta_2\| \leq 1$ . Além disso  $H_{i+1,k}, \delta H_{i+1,k}$  são parâmetros e incertezas, respectivamente, de diversos modelos, escolhidas por uma cadeia de Markov  $\Theta_i = k$  variante no tempo, com distribuição de probabilidade  $\pi_{i,k}$ , ou seja, a cada instante  $i$ , o modelo de medida  $z_i$  é calculado utilizando uma das matrizes  $H_{i+1,k}$  e sua incerteza  $\delta H_{i+1,k}$ , de acordo com a probabilidade destas serem escolhidas.

Seja a função custo do sistema (48) definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} J_i := & \left\{ \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ \bar{v}_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}\pi_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ \bar{v}_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \right. \\ & + \left( \begin{bmatrix} F_i & G_i & 0 & -I \\ 0 & 0 & \bar{K}_{i+1} & \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \bar{K}_{i+1} & \delta \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right. \\ & \times \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ \bar{v}_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i} \\ -\bar{z}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta F_i \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \left. \right)^T \mu_i \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \\ & \times \left( \begin{bmatrix} F_i & G_i & 0 & -I \\ 0 & 0 & \bar{K}_{i+1} & \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \bar{K}_{i+1} & \delta \bar{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right. \\ & \left. \left. \times \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ \bar{v}_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i} \\ -\bar{z}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta F_i \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right\}. \quad (50) \end{aligned}$$

sendo,  $\mu_i \geq 0$  e  $\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \geq 0$  e

$$\begin{aligned} \bar{H}_{i+1} := & \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}; \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1} \\ \vdots \\ z_{i+1} \end{bmatrix}; \bar{v} := \begin{bmatrix} v_{i+1} \\ \vdots \\ v_{i+1} \end{bmatrix} \\ \bar{I}\pi_{i+1} := & \begin{bmatrix} I\pi_{i+1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I\pi_{i+1,2}^{-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I\pi_{i+1,L}^{-1} \end{bmatrix}; \bar{K}_{i+1} := \begin{bmatrix} K_{i+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{i+1,2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & K_{i+1,L} \end{bmatrix}. \quad (51) \end{aligned}$$

O problema de filtragem robusta é encontrar  $\hat{x}_{i+1,i+1}$  que minimize  $J_i$ , considerando o

caso de incertezas num cenário de fusão de dados probabilístico, isto é:

$$\min_{x_i, x_{i+1}} \max_{\delta_i} J_i. \quad (52)$$

Considerando as identificações apresentadas em (51), a equação (50) recai no problema de filtragem robusto abordado em (BIANCO, 2009), assim, a estimativa filtrada robusta é dada da seguinte maneira, com prova análoga a demonstrada em (BIANCO, 2009):

**Teorema 3.2.** *Considere o sistema dinâmico robusto (48), o problema de otimização em (52) e as incertezas modeladas em (49). Suponha que:*

$$\begin{bmatrix} I & \overline{H}_{i+1}^T & N_I^T & \overline{N}_{H_{i+1}}^T \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} F_i & G_i & I \\ 0 & \overline{K}_{i+1} & \overline{H}_{i+1} \\ N_{F_i} & N_{G_i} & N_I \\ 0 & \overline{N}_{K_{i+1}} & \overline{N}_{H_{i+1}} \end{bmatrix}. \quad (53)$$

seja posto linha pleno para todo  $i$ . Dessa forma, tem-se que as estimativas robustas filtradas  $\hat{x}_{i+1|i+1}$  e sua correspondente equação recursiva de Riccati são dadas por: **Passo 0: (Condições Iniciais)**

$$P_{0|0} := (P_0^{-1} + \overline{H}_0^T \overline{R}_0^{-1} \overline{H}_0)^{-1} \quad (54)$$

$$\hat{x}_{0|0} := P_{0|0} \overline{H}_0^T \overline{I}_0^{-1} \overline{z}_0 \quad (55)$$

onde,

$$\overline{I}_0 := \text{diag} [I_{0,k}] \quad (56)$$

**Passo 1: Atualize  $\hat{x}_{i|i}$ ,  $P_{i|i}$  para**

$$\hat{x}_{i+1|i+1}, P_{i+1|i+1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1|i+1}, P_{i+1|i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{\lambda}_i I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{\lambda}_i I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_i^{-1} & 0 & 0 & M_i & \mathcal{F}_i & \mathcal{G}_i & \mathcal{E}_i & \mathcal{Z}_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & N_{\mathcal{F}_i} & N_{\mathcal{G}_i} & N_{\mathcal{E}_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & M_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & \mathcal{F}_i^T & N_{\mathcal{F}_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \mathcal{G}_i^T & N_{\mathcal{G}_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_i^T & N_{\mathcal{E}_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}. \quad (57)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &:= \begin{bmatrix} -I \\ H_{i+1,1} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}; \quad N_{\mathcal{E},i} := \begin{bmatrix} 0 \\ N_{H_{i+1,1}} \\ \vdots \\ N_{H_{i+1,L}} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{F}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \end{bmatrix}; \quad N_{\mathcal{F},i} := \begin{bmatrix} N_{F_i} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad M_i := \begin{bmatrix} M_{1,i} & 0 \\ 0 & M_{2,i} \end{bmatrix} \\ \mathcal{G}_i &:= \begin{bmatrix} G_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{i+1,1} & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{i+1,L} \end{bmatrix}; \quad N_{\mathcal{G},i} := \begin{bmatrix} N_{G_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_{K_{i+1,1}} & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{K_{i+1,L}} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{R}_i := \begin{bmatrix} Q_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{\pi_{i+1,1}^{-1}} & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\pi_{i+1,L}^{-1}} \end{bmatrix}. \quad (58) \end{aligned}$$

Além disso, tem-se que:

$$\hat{W}_i = (\Xi_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i M_i^T)^{-1}$$

para  $\mu > 0$  fixado.

O parâmetro  $\hat{\lambda}_i$  deve satisfazer a seguinte desigualdade  $\hat{\lambda}_i \geq \|M_i^T \Xi_i^{-1} M_i\|$  e minimizar:

$$G(\lambda) = \|x(\lambda)\|_Q^2 + \lambda \|N_A x(\lambda) - N_b\|^2 + \|A_i x(\lambda) - b_i\|_{W(\lambda)}^2.$$

**Observação:** Considerando  $\lim_{\Xi \rightarrow 0}$  que é equivalente a tomar  $\lim_{\mu_i \rightarrow \infty}$  e aplicando a teoria de função penalidade, obtemos  $\hat{\lambda}_i^{-1} \rightarrow 0$  e  $W_i^{-1} \rightarrow 0$ .

## 4 Resultados

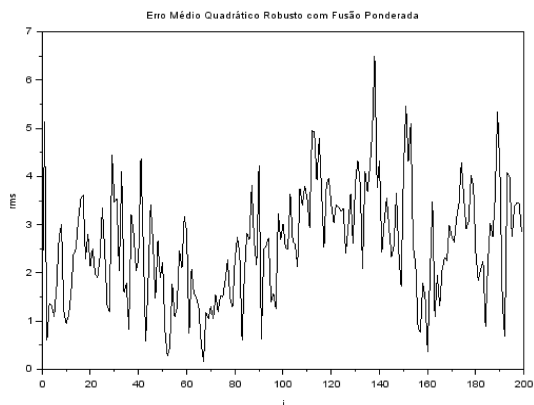
A seguir são apresentados exemplos numéricos que demonstram a eficiência das estimativas filtradas robustas para sistemas no espaço de estado, além de mostrar a convergências dos filtros apresentados. Nos testes foram empregados como termo de comparação a raiz do erro médio quadrático (rms).

Para o caso da estimativa filtrada robusta no cenário de fusão de dados ponderada, destacada na subseção (3.1), foram adaptados para o caso onde são considerados 3 modelos de medidas.

Foi realizado um estudo baseado no cálculo do erro médio quadrático para a estimativa filtrada robusta com fusão de dados ponderada, que pode ser observada na Figura 1. Para esta simulação foi tomado um parâmetro  $H$  diferente, no caso  $H_3$ , caracterizando uma medida errada que apresenta uma grande distorção em relação as demais, visto que as  $H_1, H_2$  possuem valores bem próximos, com o objetivo de simular uma falha no sistema. Com isto, é possível perceber que o filtro, mesmo com medidas que apresentam dispersões, consegue ser estimado

utilizando as informações presentes nas demais medidas através do uso da técnica fusão de dados. As curvas foram obtidas de 0, ..., 200 para cada passo recursivo de 4000 simulações de Monte Carlo.

Figura 1: Erro médio quadrático para a estimativa robusta com fusão de dados ponderada.

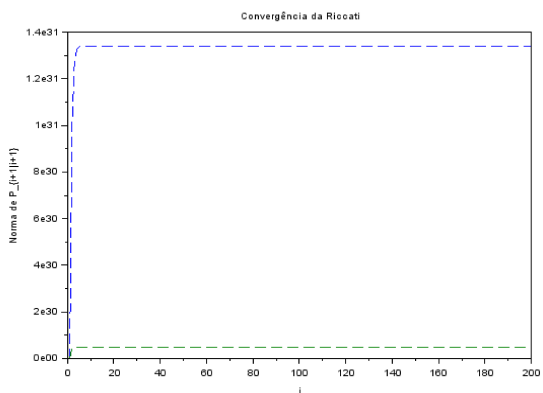


Fonte: Elaborado pelo autor

Por meio do teste apresentado, o filtro robusto num cenário de fusão de dados ponderada, demonstrou um bom desempenho em termos do erro médio quadrático, visto que o erro foi minimizado.

A Figura 2 mostra a convergência do valor máximo da matriz  $P_{i+1|i+1}$ , calculada de acordo com o filtro apresentado em 3.1. Isto significa que, mesmo quando um sistema possui várias equações de medidas e está sujeito a falhas, aplicando a técnica de fusão de dados, é possível obter um filtro ótimo, isso pode ser observado por meio da convergência da covariância do erro de estimativa.

Figura 2: Convergência de  $P_{i+1|i+1}$  num cenário de fusão de dados ponderada.



Fonte: Elaborado pelo autor

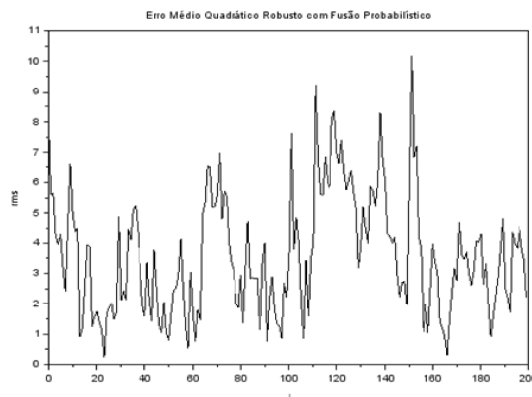
Da mesma maneira, foram realizados testes para o algoritmo da estimativa filtrada robusta no cenário de fusão probabilística, apresentada na subseção (3.2), onde são considerados os parâmetros, a variância do ruído do modelo de medida, a matriz de probabilidade de transição dos modelos de medida e os valores iniciais da distribuição de probabilidade de  $\Theta_i$ , que são dadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 F &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.6 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad H_1 = [0.7 \quad 1.1]; \quad H_2 = [0.9 \quad 1.3]; \\
 H_3 &= [0.6 \quad 1.2]; \quad K_1 = 1; \quad K_2 = 1; \quad K_3 = 1; \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0.0198 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0.18 \end{bmatrix}; \\
 N_F &= \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix}; \quad N_G = \begin{bmatrix} 0.19 & -0.04 \end{bmatrix}; \quad N_{H,1} = \begin{bmatrix} -0.12 & -0.06 \end{bmatrix}; \quad N_{H,2} = \begin{bmatrix} -0.12 & -0.06 \end{bmatrix}; \\
 N_{H,3} &= \begin{bmatrix} -0.12 & -0.06 \end{bmatrix}; \quad N_{K,1} = 0.05; \quad N_{K,2} = 0.05; \quad N_{K,3} = 0.05; \quad R = 0.16; \\
 \pi_1(0) &= 0.4; \quad \pi_2(0) = 0.5; \quad \pi_3(0) = 0.1; \quad Pm = \begin{bmatrix} 0.525 & 0.455 & 0.02 \\ 0.425 & 0.475 & 0.1 \\ 0.25 & 0.55 & 0.2 \end{bmatrix}. \quad (59)
 \end{aligned}$$

com valores randômicos de  $\Theta_i \in \{1, 2, 3\}$ .

Foi realizado um estudo baseado no cálculo do erro médio quadrático para a estimativa robusta num cenário fusão de dados probabilística, que pode ser observada na Figura 3. As curvas foram obtidas de  $i = 0 \dots 200$  para cada passo recursivo de 4000 simulações de Monte Carlo.

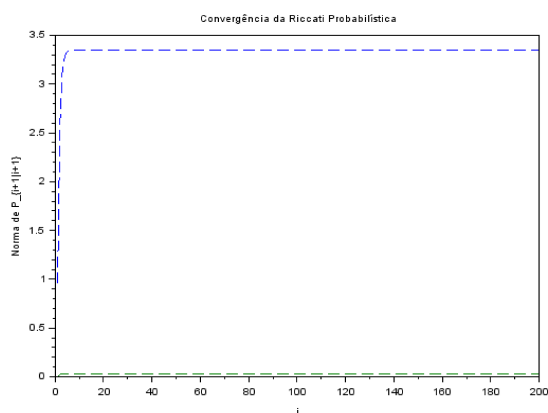
Figura 3: Erro médio quadrático para a estimativa robusta com fusão de dados probabilística.



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 4 mostra a convergência do valor máximo da matriz  $P_{i+1|i+1}$ , calculada de acordo com o filtro apresentado em 3.2. Isto significa que, mesmo quando um sistema que possui várias equações de medidas, sujeito a falhas, e aplicando a técnica de fusão de dados, é possível obter um filtro ótimo, isso pode ser observado por meio da convergência da covariância do erro de estimativa.

Figura 4: Convergência de  $P_{i+1|i+1}$  num cenário de fusão de dados probabilística.



Fonte: Elaborado pelo autor

## 5 Considerações finais

Neste artigo apresentamos as estimativas recursivas robustas do tipo Kalman na forma filtrada para sistemas no espaço de estado discretos no tempo num cenário de fusão de dados para os casos ponderado e probabilístico. As estimativas robusta foram obtidas com base em duas técnicas de otimização, a saber: a técnica dos mínimos quadrados e o método de função penalidade. A formulação do sistema dinâmico apresentado neste trabalho foi realizada de uma maneira mais geral, apresentando ruídos tanto de estado quanto de medida e incertezas em todos os parâmetros.

Vale ressaltar que, por meio do desenvolvimento das estimativas filtradas é possível perceber que as mesmas são equivalentes aos filtros encontrados na literatura. A diferença está no fato de que, neste trabalho essas estimativas foram desenvolvidas por meio de um sistema que apresenta diversas equações de medidas, diferente dos trabalhos já existentes, uma vez que os mesmos utilizam apenas uma medição em suas equações de saída, além disso, possuem incertezas em todos os parâmetros, como pode ser observado em (ISHIHARA; TERRA; CERRI, 2015). Essas várias medidas de observação estão sujeitas a falhas podendo assim ocasionar um mau desempenho do sistema, com isso foi necessário utilizar uma técnica

denominada fusão de dados.

O presente estudo possibilitou perceber que, um sistema que possui várias equações de medidas suscetíveis a falhas e esteja sujeito a incertezas em todos os parâmetros, caso uma das medidas apresente uma falha, é possível por meio da técnica de fusão de dados combinar a informação presente em cada medida para prover novas informações, o que nenhuma medida poderia oferecer de maneira individual. Os resultados obtidos por meio da convergência da covariância do erro (equação da Riccati), mostrou a eficácia da técnica apresentada, pois mesmo com o sistema sujeito a falhas, houve uma convergência do filtro.

Enfim, o estudo desenvolvido por meio deste trabalho possibilitou perceber que os algoritmos apresentados podem ser aplicados a problemas que estão sujeitos a falhas nos processos de medidas.

## Referências

BERTSEKAS, D.; RHODES, I. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 16, n. 2, p. 117–128, 1971. 4

BIANCO, A. F. *Filtros de Kalman robustos para sistemas dinâmicos singulares em tempo discreto*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2009. 12, 13, 16, 19

D'APPOLITO, J.; HUTCHINSON, C. Low sensitivity filters for state estimation in the presence of large parameter uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 14, n. 3, p. 310–312, 1969. 4

EINICKE, G. A.; WHITE, L. B. Robust extended kalman filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 47, n. 9, p. 2596–2599, 1999. 4

HASAN, M. A.; AZIMI-SADJADI, M. R. Noncausal image modeling using descriptor approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, IEEE, v. 42, n. 8, p. 536–540, 1995. 3

ISHIHARA, J. Y.; TERRA, M. H. Robust state prediction for descriptor systems. *Automatica*, Elsevier, v. 44, n. 8, p. 2185–2190, 2008. 4

ISHIHARA, J. Y.; TERRA, M. H.; CERRI, J. P. Optimal robust filtering for systems subject to uncertainties. *Automatica*, Elsevier, v. 52, p. 111–117, 2015. 4, 23

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960. 3

KALMAN, R. E.; BUCY, R. S. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of basic engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 83, n. 1, p. 95–108, 1961. 3

- LEI, Z.; DONG-MEI, Z. Multi-rate distributed fusion estimate of sensor networks based on descriptor system. In: IEEE. *The 27th Chinese Control and Decision Conference (2015 CCDC)*. [S.l.], 2015. p. 1440–1445. 4
- LUENBERG, D. G. *Linear and Nonlinear Programming*. 2nd. ed. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003. 4, 13
- MILLS, J. K.; GOLDENBERG, A. A. Force and position control of manipulators during constrained motion tasks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, IEEE, v. 5, n. 1, p. 30–46, 1989. 3
- QI, W.; ZHANG, P.; DENG, Z. Robust weighted fusion kalman filters for multisensor time-varying systems with uncertain noise variances. *Signal Processing*, Elsevier, v. 99, p. 185–200, 2014. 4
- QUEIROZ, T. B. de; MEDEIROS, O. R. de; NETO, J. C. d. C. O. Evidências de bolhas especulativas na bovespa: Uma aplicação do filtro de kalman. *Revista Brasileira de Finanças*, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 9, n. 2, p. 257–275, 2011. 3
- RAN, C.-J.; DENG, Z.-L. Two average weighted measurement fusion kalman filtering algorithms in sensor networks. In: IEEE. *2008 7th World Congress on Intelligent Control and Automation*. [S.l.], 2008. p. 2387–2391. 4
- ROOPA, H.; PARIMALA, P.; RAOL, J. Image sensor data fusion using factorized kalman filter. In: IEEE. *2016 IEEE International Conference on Recent Trends in Electronics, Information & Communication Technology (RTEICT)*. [S.l.], 2016. p. 1217–1220. 4
- SAYED, A. H. A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 46, n. 7, p. 998–1013, 2001. 4
- SAYED, A. H.; AL-NAFFOURI, T.; KAILATH, T. Robust estimation for uncertain models in a data fusion scenario. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 33, n. 15, p. 899–904, 2000. 4, 5, 6, 8, 10
- SHAKED, U.; SOUZA, C. E. de. Robust minimum variance filtering. *IEEE Transactions on signal processing*, IEEE, v. 43, n. 11, p. 2474–2483, 1995. 4
- WANG, F.; BALAKRISHNAN, V. Robust kalman filters for linear time-varying systems with stochastic parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 50, n. 4, p. 803–813, 2002. 4
- XIE, L.; SOH, Y. C.; SOUZA, C. E. D. Robust kalman filtering for uncertain discrete-time systems. *IEEE Transactions on automatic control*, IEEE, v. 39, n. 6, p. 1310–1314, 1994. 4
- XIONG, K.; WEI, C.; LIU, L. Robust kalman filtering for discrete-time nonlinear systems with parameter uncertainties. *Aerospace Science and Technology*, Elsevier, v. 18, n. 1, p. 15–24, 2012. 4
- YING, S. Measurement fusion kalman filters for descriptor stochastic systems. In: IEEE. *2007 Chinese Control Conference*. [S.l.], 2007. p. 775–778. 4

ZHOU, T. Sensitivity penalization based robust state estimation for uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 55, n. 4, p. 1018–1024, 2010. 4

Enviado em: 19 out. 2020.

Aceito em: 11 dez. 2020.

Editores responsáveis: Bianca Neves Machado

Mateus das Neves Gomes.

.