

CONTROLE INTEGRAL ROBUSTO CHAVEADO VIA LMIs DE UM SISTEMA AEROPÊNDULO COM INCERTEZAS PARAMÉTRICAS

ROBUST INTEGRAL SWITCHED CONTROL VIA LMIs OF AN AEROPENDULUM SYSTEM WITH PARAMETRIC UNCERTAINTIES

Hugo Fernando Yamanaka¹ Ricardo Breganon² Flávio Andrade Faria³ Rodrigo Cardim⁴ Uiliam Nelson Lenzion Tomaz Alves⁵ Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira⁶ 

Resumo: O controle robusto chaveado tem se tornado uma área de grande destaque na engenharia de controle, pois oferece soluções eficientes para sistemas, sujeitos a incertezas paramétricas e falhas. Neste sentido, este trabalho apresenta a modelagem de um sistema Aeropêndulo em espaço de estados com incertezas paramétricas e seu controle robusto chaveado baseado na teoria das Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*). O sistema é composto por um conjunto motor-hélice acoplado a um eixo rotacional por meio de uma haste. O deslocamento angular da haste é impulsionado pela força de empuxo gerada por esse conjunto. Assim, o próprio conjunto motor-hélice é o responsável por conduzir a haste até o ângulo desejado. O modelo linear do sistema em espaço de estados é obtido através de uma aproximação em torno de um ponto de operação. Além disso, incorporou-se uma ação integral ao sistema de controle, mediante a introdução de uma nova variável de estado. Posteriormente, considerou-se a variação dos parâmetros do sistema para projetar os ganhos de realimentação do controle robusto chaveado. Para encontrar os ganhos usou-se condições de projeto na forma de LMIs com taxa de decaimento e restrição na norma dos ganhos do controlador. Desta forma, o objetivo deste trabalho é estabilizar o sistema e fazê-lo seguir uma trajetória do tipo degrau. Resultados de simulação são apresentados ao longo deste trabalho e mostram que esta técnica apresentou desempenho satisfatório.

Palavras-chave: Controle robusto chaveado. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). Incertezas paramétricas. Aeropêndulo.

¹Mestrando em Engenharia Elétrica, UNESP, Ilha Solteira, São Paulo, e-mail: hugo.yamanaka@unesp.br.

²Doutor em Engenharia Mecânica, IFPR, Jacarezinho, Paraná, e-mail: ricardo.breganon@ifpr.edu.br.

³Doutor em Engenharia Elétrica, UNESP, Ilha Solteira, São Paulo, e-mail: flavio.faria@unesp.br.

⁴Doutor em Engenharia Elétrica, UNESP, Ilha Solteira, São Paulo, e-mail: rodrigo.cardim@unesp.br.

⁵Doutor em Engenharia Elétrica, IFPR, Jacarezinho, Paraná, e-mail: uiliam.alves@ifpr.edu.br.

⁶Doutor em Engenharia Elétrica, UNESP, Ilha Solteira, São Paulo, e-mail: marcelo.minhoto@unesp.br.

Abstract: Robust switched control has gained significant attention in control engineering as it provides efficient solutions for systems subject to parametric uncertainties and failures. In this context, this paper presents the modeling of an Aeropendulum system in state space with parametric uncertainties and its robust switched control based on the theory of Linear Matrix Inequalities (LMIs). The system comprises a coupled motor-propeller assembly connected to a rotational axis via a rod. The angular displacement of the rod is induced by the thrust force generated by this assembly. Consequently, the motor-propeller assembly guides the rod to the desired angle. The linear state-space model of the system is derived using an approach centered around an operating point. Additionally, an integral action has been incorporated into the control system by introducing a new state variable. Subsequently, system parameter uncertainties were considered to design the feedback gains of the robust switched control. The design conditions were formulated as LMIs with a decay rate and constraints on the norm of the controller's gains. The primary goal of this work is to stabilize the system and enable it to track a step-like trajectory. Simulation results presented throughout this paper demonstrate the satisfactory performance of this technique.

Keywords: Switched robust control. Linear Matrix Inequalities (LMIs). Parametric uncertainties. Aeropendulum.

1 INTRODUÇÃO

O controle de sistemas mecânicos envolvendo pêndulos são considerados problemas clássicos na área de engenharia de controle, pois são não lineares, com ponto de equilíbrio instável e, muitas vezes, subatuados (com mais graus de liberdade do que entradas de controle) (JOB e JOSE, 2015; OGATA, 2010; YAMANAKA *et al.*, 2022a). Em geral, sistemas que consistem em pêndulos, apesar de suas características naturalmente não lineares, podem ser aproximados por modelos lineares nas proximidades de seus pontos de equilíbrio (SLOTINE e LI, 1991; ENIKOV e CAMPA, 2012). Entre as várias configurações de pêndulos, o Aeropêndulo é uma das que vêm sendo estudadas em pesquisas.

A literatura explora várias abordagens de controle, tanto lineares quanto não lineares, em sistemas do tipo Aeropêndulo. Silva *et al.* (2021) utilizam o controle robusto chaveado baseado em modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno. Job e Jose (2015) discutem a modelagem e o controle de um sistema Aeropêndulo usando controle regulador linear quadrático (LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulator*) e controle proporcional-integral-derivativo (PID). Enikov e Campa (2012) apresentam controle por realimentação linearizante. Breganon *et al.* (2021) utilizam um controlador \mathcal{H}^∞ . Yamanaka *et al.* (2022b) consideram o controle seguidor de referência via LMIs.

O controle robusto busca garantir o desempenho satisfatório de um sistema mesmo quando há incertezas, variações nos parâmetros do sistema ou perturbações externas. A principal vantagem do controle robusto é sua capacidade de lidar com uma ampla gama de incertezas e perturbações, garantindo que o sistema permaneça estável e forneça um desempenho satisfatório, independentemente das variações em seus parâmetros (ZHOU e DOYLE, 1998). Este tipo de controle é utilizado, em sua maioria, em sistemas críticos, como aeronaves, sistemas de energia, sistemas de controle de processos e robótica, em que pequenas variações, perturbações e falhas (MANESCO *et al.*, 2012).

Já o controle chaveado (ou no inglês *switched control*), refere-se a uma técnica de controle em que um sistema é regulado alternando entre diferentes

modos de operação. Por exemplo, ao invés de usar um único ganho para todo o intervalo de operação, o sistema utiliza múltiplos ganhos que são ativados em diferentes condições ou estados do sistema (LIBERZON, 2003). A mudança entre os modos de operação é feita com base em uma lei de chaveamento que pode depender do vetor de estado do sistema controlado (DEAECTO, GEROMEL e DAAFOUZ, 2011). À medida que o sistema evolui e suas condições mudam, o controle chaveado pode alternar entre diferentes ganhos para garantir a estabilidade do sistema.

Quando o objetivo de controle é não apenas estabilizar o sistema, mas também impor que a saída deste siga uma determinada trajetória, é possível utilizar um servomecanismo, também chamado na literatura de controle integral. Segundo Ogata (2010), o controle integral é uma técnica de controle que visa eliminar o erro em regime permanente devido a perturbações ou atrasos, sendo capaz de corrigir desvios persistentes entre a saída desejada e a saída real do sistema.

Neste trabalho é apresentada a modelagem não linear do sistema Aeropêndulo, por meio do somatório de torques atuantes no sistema. Em seguida, o modelo é linearizado em torno de um ponto de operação. São levadas em considerações as características de um protótipo que se encontra presente no Laboratório de Automação e Controle do Instituto Federal do Paraná (IFPR) – Jacarezinho nas análises realizadas. Como este sistema Aeropêndulo apresenta um erro em regime permanente nas implementações, é inserida uma ação integral ao sistema mediante a introdução de uma nova variável de estado. Posteriormente, considerou-se que o sistema possui parâmetros incertos para o projeto do controle robusto chaveado. Este projeto utilizou condições descritas em LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) considerando taxa de decaimento e restrição na norma do controlador, com o objetivo de encontrar os ganhos da realimentação e uma lei de chaveamento para estabilizar o sistema, garantir um bom desempenho, e que os ganhos estejam de acordo com as especificações do protótipo.

As próximas seções deste artigo são organizadas como se segue: na Seção 2 são apresentados o modelo não linear do Aeropêndulo, por meio do somatório de torques atuantes do sistema, a linearização deste modelo em torno de um ponto de operação, a dinâmica aumentada com a inclusão do integrador

na malha de controle, e consideradas incertezas na forma de variação dos parâmetros do modelo. Posteriormente, na Seção 3, é descrita brevemente a teoria do controlador robusto chaveado via LMIs e os teoremas utilizados. Os resultados de simulação são exibidos na Seção 4; e na Seção 5 são traçadas as conclusões e propostas de trabalhos futuros.

2 MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA AEROPÊNDULO COM INCERTEZAS PARAMÉTRICAS

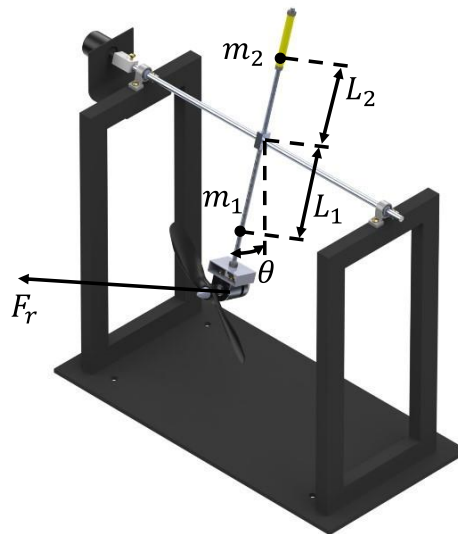
O sistema Aeropêndulo considerado para as simulações deste trabalho é apresentado na Figura 1 (YAMANAKA *et al.*, 2022a), e encontra-se presente no Laboratório de Automação e Controle do Instituto Federal do Paraná (IFPR) – Jacarezinho. Este sistema é composto por uma haste com movimento rotacional em torno de uma articulação central (pivô) na qual existe um encoder rotacional incremental, que é o responsável por medir a variação da posição angular. Em uma das pontas da haste existe um conjunto motor-hélice que é o responsável por fornecer o torque para o movimento. Na outra extremidade é fixada uma haste com um contrapeso, a fim de balancear o sistema e reduzir a força de empuxo necessária para o deslocamento angular da haste (YAMANAKA *et al.*, 2022b).

A partir do diagrama de movimento do sistema Aeropêndulo apresentado na Figura 1, é feito o somatório dos torques em relação ao ponto de rotação do protótipo, desta forma, obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{g}{I}(-m_1L_1 + m_2L_2)\text{sen}(\theta(t)) - \frac{b}{I}\dot{\theta}(t) + \frac{\tau(t)}{I}, \quad (1)$$

sendo seus parâmetros descritos na Tabela 1.

Figura 1 – Diagrama de movimento do protótipo Aeropêndulo.



Fonte: adaptado de Yamanaka *et al.* (2022a).

Tabela 1 – Parâmetros do sistema Aeropêndulo.

Símbolo	Descrição	Valor
L_1	Distância do eixo de rotação até o centro de massa do conjunto haste, motor e hélices	201,85 mm
L_2	Distância do eixo de rotação até o centro de massa do contrapeso	85,48 mm
m_1	Massa do conjunto da haste, motor e hélices	118,27 g
m_2	Massa total do contrapeso	108,59 g
I	Momento de inércia total	0,0065 kg. m ²
b	Coefficiente de atrito viscoso	0,0098 N.m.s/rad
g	Aceleração da gravidade	9,81 m/s ²
F_r	Força de empuxo	–

Fonte: adaptado de Yamanaka *et al.* (2022a).

O processo de linearização do sistema (1) para um ângulo θ_0 tem como base a expansão da função não linear em uma série de Taylor (OGATA, 2010). A linearização em torno de um ponto de operação (x_e, u_e) consiste em encontrar as matrizes A e B do modelo em espaço de estados que represente o sistema nas proximidades deste ponto. Seja o sistema $\dot{x} = f(x, u)$, então

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x_e, u_e}, \quad B = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x_e, u_e}. \quad (2)$$

Para linearizar o sistema (1) em torno do ponto de operação $(\theta, \dot{\theta}, \tau) = (\theta_0, 0, u_0)$ considera-se as variáveis de estado $x_1(t) = \Delta\theta(t)$, a

variação da posição angular (rad) da haste em relação ao ponto de operação θ_0 , e $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$, a velocidade angular (rad/s) da haste; o sinal de controle do sistema $u(t) = \Delta u(t)$, a variação do torque em relação a u_0 , e a saída $y(t) = x_1(t) = \Delta\theta(t)$. Assim, obtém-se o modelo linearizado em espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{I}(-m_1L_1 + m_2L_2)\cos(\theta_0) & -\frac{b}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} u(t), \quad (3)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

O sistema Aeropêndulo geralmente apresenta um erro em regime permanente durante as implementações e, para resolver este problema, é inserida uma ação integral ao sistema de controle, mediante a introdução de uma nova variável de estado ao sistema (SILVA *et al.*, 2021). Essa abordagem foi utilizada em Teixeira *et al.* (2006), Yamanaka *et al.* (2022b) e Bispo *et al.* (2022), em que a nova variável de estado $\xi(t)$ é definida como a integral do erro entre a posição desejada e a medida.

Seja r_0 uma referência constante conhecida para o sistema de controle. Deseja-se projetar uma lei de controle \hat{u} tal que

$$\hat{y}(t) = \bar{C}\hat{x}(t) \rightarrow r_0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Sendo que \hat{u} e \hat{x} devem ser limitados ($|\hat{u}|$ e $|\hat{x}| < \infty$, para $t \geq 0$). Desta forma, considerando (4), adicionou-se uma nova variável de estado $\xi(t)$ ao sistema (3) de modo a atingir a especificação exigida em (4). Logo, o novo sistema é dado da seguinte forma (TEIXEIRA *et al.*, 2006)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ \dot{\xi}(t) = Cx(t) - r_0, \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (5)$$

em que $\dot{\xi}(t) = Cx(t) - r_0$ é o erro da trajetória.

Levando em consideração o sistema (3), (4) e (5), tem-se o seguinte sistema aumentado:

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}}(t) &= \bar{A}\hat{x}(t) + \bar{B}\hat{u}(t), & \hat{y}(t) &= \bar{C}\hat{x}(t), \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{I}(-m_1L_1 + m_2L_2)\cos(\theta_0) & -\frac{b}{I} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \\ 0 \end{bmatrix} \hat{u}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\hat{y}(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}.$$

A partir do sistema aumentado (6) e dos parâmetros apresentados na Tabela 1, este trabalho considera que os valores dos parâmetros possuem variações com limites inferiores e superiores conhecidos. Assim, as variáveis incertas para o projeto do controle robusto foram consideradas nos seguintes intervalos: $181,7 \leq L_1 \leq 222,0$ [mm], $76,9 \leq L_2 \leq 94,0$ [mm], $106,5 \leq m_1 \leq 130,1$ [g], $97,7 \leq m_2 \leq 119,4$ [g], $0,0058 \leq I \leq 0,0071$ [kg.m²], $0,0088 \leq b \leq 0,0108$ [N.m.s/rad] e $\theta_0 = 0,5236$ [rad]. Com isto, o sistema incerto pode ser representado por

$$\dot{\hat{x}}(t) = \bar{A}(\alpha)\hat{x}(t) + \bar{B}(\alpha)\hat{u}(t), \quad \hat{y}(t) = \bar{C}\hat{x}(t), \quad (7)$$

em que \hat{x} representa o vetor de estados, \hat{u} a entrada de controle e \hat{y} a saída medida. As matrizes $\bar{A}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\bar{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ são estruturadas na forma

$$X(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i,$$

sendo X_i , $i = 1, \dots, N$, matrizes conhecidas (chamadas de vértices) e $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N]^T$ um vetor parâmetros incertos invariantes no tempo. O número de vértices (N) está relacionado com o número de elementos que possuem variáveis incertas em (6), assim, $N = 2^s$, em que $s = 3$, o número de elementos com parâmetros incertos. Os vértices do politopo em (7) são:

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 = \bar{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9,6341 & -1,2347 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_3 = \bar{A}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9,6341 & -1,8444 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_5 = \bar{A}_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -31,0361 & -1,2347 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_7 = \bar{A}_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -31,0361 & -1,8444 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\bar{B}_1 = \bar{B}_3 = \bar{B}_5 = \bar{B}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 139,9890 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \bar{B}_4 = \bar{B}_6 = \bar{B}_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 171,0977 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3 CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO COM INTEGRADOR VIA LMIs

As Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) emergiram como uma ferramenta computacional útil para resolver muitos problemas práticos complexos de controle (BOYD *et al.*, 1994; GEROMEL, 2023). As LMIs podem ser facilmente resolvidas utilizando técnicas de programação convexa (BOYD *et al.*, 1994). A estabilidade do sistema (7) pode ser estudada através da seguinte candidata à função de Lyapunov quadrática:

$$V(\hat{x}) = \hat{x}^T P \hat{x}, P = P^T > 0, \quad (9)$$

sendo P uma matriz simétrica definida positiva, que permite o desenvolvimento de condições de estabilidade e desempenho para o sistema na forma de LMIs.

A taxa de decaimento tem por objetivo alocar os autovalores do sistema no semi-plano esquerdo deslocado de uma distância β do eixo imaginário, e essa distância é associada com a velocidade de convergência das variáveis de estado do sistema (TANAKA, IKEDA e WANG, 1998). Assim, a estabilidade do sistema (7) considerando taxa de decaimento β pode ser assegurada com um controlador projetado a partir do Teorema 1.

A norma dos ganhos do controlador pode ficar com valores elevados dependendo das restrições de desempenho desejadas, e isso pode afetar a implementação do controlador. Desta forma, considera-se uma restrição sobre os ganhos do controlador que é imposta pelo Teorema 2, assegurando menores valores para os ganhos.

Teorema 1 (TANAKA, IKEDA e WANG, 1998; SOUZA *et al.*, 2013): seja o sistema linear com incertezas paramétricas dado em (7), uma taxa de decaimento $\beta > 0$ e a lei de controle com realimentação do vetor de estado dada por $\hat{u}(t) = -K(\alpha)\hat{x}(t)$, em que $K(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i K_i$, $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Assim, o sistema em malha fechada será globalmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β , se existir uma matriz definida positiva e simétrica $X = X^T (X > 0)$ e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que, para todo $i, j \in \mathbb{K}_N = \{1, 2, 3, \dots, N\}$, as seguintes LMIs sejam factíveis:

$$X\bar{A}_i^T + \bar{A}_i X - \bar{B}_i M_i - M_i^T \bar{B}_i^T + 2\beta X < 0, \quad (10)$$

$$(\bar{A}_i + \bar{A}_j)X + X(\bar{A}_i + \bar{A}_j)^T - \bar{B}_i M_j - \bar{B}_j M_i - M_i^T \bar{B}_j^T - M_j^T \bar{B}_i^T + 4\beta X \leq 0,$$

sendo $i < j$, em caso afirmativo, os ganhos do controlador são dados por $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_N$.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Tanaka, Ikeda e Wang (1998).

Teorema 2 (ŠILJAK e STIPANOVIĆ, 2000): a restrição na norma dos ganhos do controlador tal que $K_i K_i^T \leq \eta \eta_x^2 I_m$ $i \in \mathbb{K}_N$, é imposta se existirem constantes $\eta > 0$, $\eta_x > 0$, tais que as LMIs do Teorema 1 em conjunto com as LMIs

$$\begin{bmatrix} \eta_x I_n & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} \eta I_n & M_i^T \\ M_i & I_m \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K}_N, \quad (11)$$

sejam factíveis, sendo I_m a matriz identidade de ordem m , e I_n a matriz identidade de ordem n .

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Šiljak e Stipanovic (2000).

A ideia básica da lei de controle chaveada proposta em Souza *et al.* (2013) é a minimização da derivada temporal da função de Lyapunov por meio da seleção adequada do ganho do controlador. Esta lei pode ser projetada utilizando o Teorema 3.

Teorema 3 (SOUZA *et al.*, 2013): admita que as condições dos Teoremas 1 e 2 sejam satisfeitas, relativas ao sistema (7) com a lei de controle $\hat{u}(t) = -K(\alpha)\hat{x}(t)$, $K(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i K_i$, $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e obtenha-se $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_N$, e $P = X^{-1}$. Então, a lei de controle chaveada dada por

$$u(t) = u_\sigma(t) = -K_\sigma \hat{x}(t); \quad \sigma = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N}^* \{-\hat{x}(t)^T P \bar{B}(\alpha) K_i \hat{x}(t)\}, \quad \sigma \in \mathbb{K}_N, \quad (12)$$

em que $\arg \min_{i \in \mathbb{K}_N}^* \{-\hat{x}(t)^T P \bar{B}(\alpha) K_i \hat{x}(t)\}$ representa o menor índice σ tal que $-\hat{x}(t)^T P \bar{B}(\alpha) K_\sigma \hat{x}(t) = \min_{i \in \mathbb{K}_N} \{-\hat{x}(t)^T P \bar{B}(\alpha) K_i \hat{x}(t)\}$, torna o ponto de equilíbrio $x = 0$, do sistema (7), globalmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β .

Demonstração. A prova pode ser encontrada em Souza *et al.* (2013).

Observe que a lei de chaveamento (12) é facilmente calculada quando $\bar{B}(\alpha) = B$ é constante e conhecida. No caso do modelo (7) esta matriz é incerta,

impossibilitando, à princípio, este cálculo.

Entretanto, tem-se para o sistema Aeropêndulo que

$$\bar{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I \\ 0 \end{bmatrix} = B_0 g(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} 1/I, \quad (13)$$

em que, $1/I \in [1/I_{\text{máximo}} \quad 1/I_{\text{mínimo}}] > 0$,

sendo B_0 uma matriz constante e $g(\alpha) \geq 0$. Devido a essas propriedades, tem-se que a lei de chaveamento σ em (12) pode ser calculada como

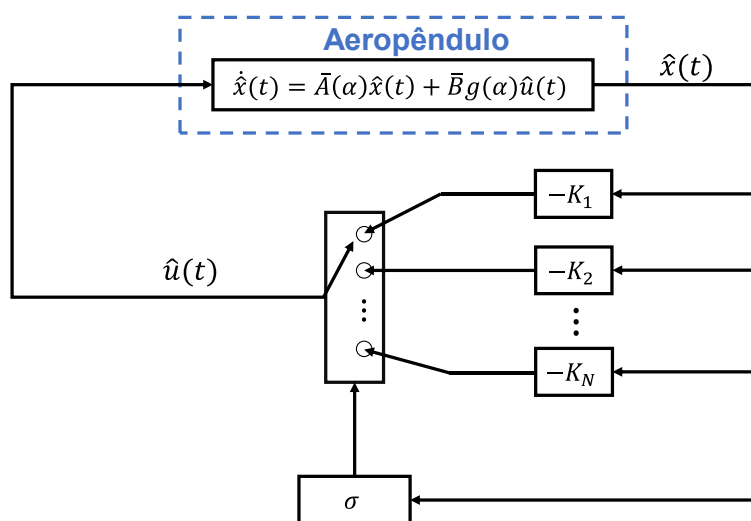
$$\begin{aligned} \sigma &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N}^* \{-\hat{x}(t)^T P \bar{B}(\alpha) K_i \hat{x}(t)\} \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N}^* \{-\hat{x}(t)^T P B_0 g(\alpha) K_i \hat{x}(t)\} \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N}^* \{-\hat{x}(t)^T P B_0 K_i \hat{x}(t)\} \end{aligned} \quad (14)$$

em que B_0 é uma matriz constante e conhecida. Assim, não se precisa da matriz incerta $\bar{B}(\alpha)$ na lei de chaveamento

Um esquema que representa o uso do controle chaveado é mostrado na Figura 2. Observa-se que o ganho de realimentação utilizado é escolhido a cada instante, entre os ganhos K_1 até K_N , através de uma lei de chaveamento dependente do estado do sistema, que controla uma chave (ALVES *et al.*, 2016).

Considere o modelo aumentando (6) como os vértices em (8). Levando em consideração o Teorema 1, LMIs (10) com $\beta = 2$, e as LMIs (11), apresentadas no Teorema 2, com os parâmetros $\eta = 11$ e $\eta_x = 13$, em que os parâmetros β , η e η_x foram escolhidos por testes de simulação.

Figura 2 – Esquema de controle robusto chaveado.



Fonte: adaptado de Deaecto, Geromel e Daafouz (2011).

Utilizando o *software* Matlab® com o *solver* SeDuMi (STURM, 1999) em conjunto com a *toolbox* Yalmip (LÖFBERG, 2004), foram obtidos os seguintes ganhos da realimentação:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= [0,2865 \quad 0,0534 \quad 0,5174], & K_5 &= [0,1466 \quad 0,0518 \quad 0,5010], \\
 K_2 &= [0,3278 \quad 0,0640 \quad 0,6242], & K_6 &= [0,1968 \quad 0,0648 \quad 0,6332], \\
 K_3 &= [0,2874 \quad 0,0499 \quad 0,5187], & K_7 &= [0,1439 \quad 0,0473 \quad 0,4943], \\
 K_4 &= [0,3223 \quad 0,0596 \quad 0,6169], & K_8 &= [0,1829 \quad 0,0587 \quad 0,6109].
 \end{aligned} \tag{15}$$

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A fim de validar a técnica de controle robusto chaveado (12) com lei de chaveamento (14) e os ganhos de realimentação (15), simulou-se no *software* Matlab/Simulink® o sistema (1) com valores nominais para os parâmetros do sistema (Tabela 1) em malha fechada. O ponto de operação desejado para o sistema foi $(\theta_0, u_0) = (0,5236 \text{ [rad]}, 0,0716 \text{ [N.m]})$, em que u_0 foi calculado a partir de θ_0 usando

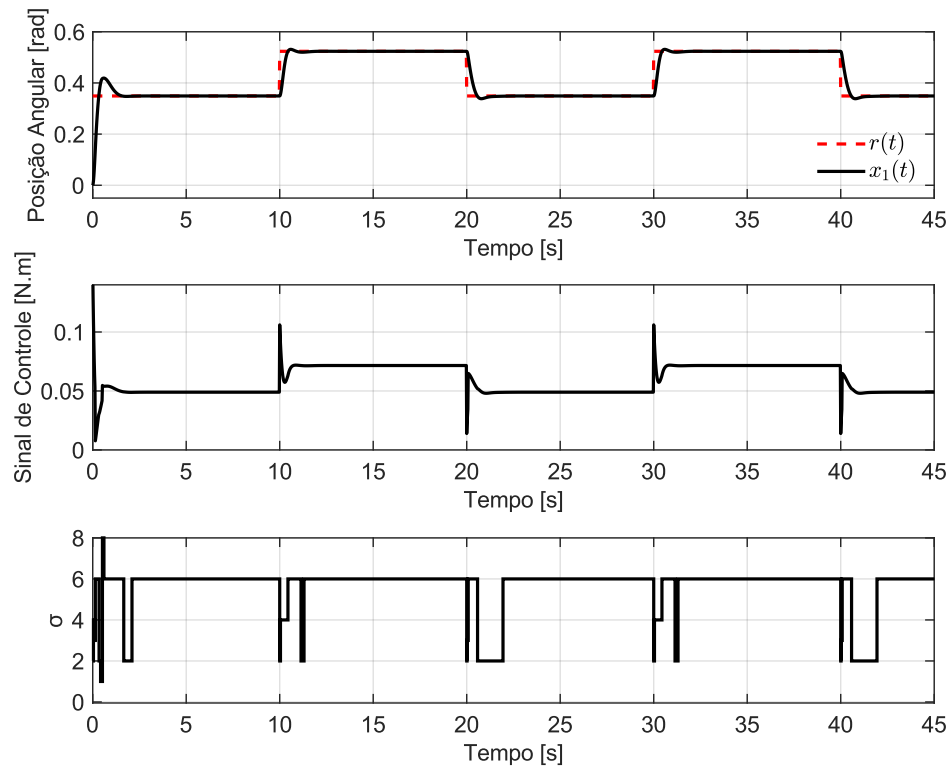
$$u_0 = -g((-m_1L_1 + m_2L_2) \text{sen}(\theta_0)). \tag{16}$$

Como u_0 em (16) depende de parâmetros incertos, seu valor real não é conhecido. Com base nos valores máximos e mínimos considerados para os parâmetros do sistema (descritos acima de (7)) calcula-se $u_{0_{\text{mínimo}}} = 0,0397$ e $u_{0_{\text{máximo}}} = 0,1047$. O valor de u_0 pode ser descrito como $u_0 = u_{0_{\text{nominal}}} + \Delta u_0$ sendo $u_{0_{\text{nominal}}}$ o valor de u_0 calculado a partir dos valores nominais dos parâmetros e Δu_0 um erro que pode ser visto como um distúrbio casado (atuando no mesmo canal da entrada de controle). Como apontado por Kayacan e Fossen (2019) e Mehndiratta *et al.* (2020), com o uso da integral do erro no cálculo do sinal de controle $(\xi(t))$ e com o controlador com ganhos constantes, a estratégia é robusta a incertezas casadas que sejam constantes, caso de Δu_0 . Assim, foram feitas simulações considerando $(\theta_0, u_{0_{\text{mínimo}}})$ e $(\theta_0, u_{0_{\text{máximo}}})$, ou seja, com erro na estimativa de u_0 .

Durante a simulação, aplicou-se uma referência tipo degrau descrita por

$$r(t) = \begin{cases} 0,3490 \text{ rad}, & 0 \leq t \leq 10 \text{ s}, \\ 0,5235 \text{ rad}, & 10 < t < 20 \text{ s}, \\ 0,3490 \text{ rad}, & 20 \leq t \leq 30 \text{ s}, \\ 0,5235 \text{ rad}, & 30 < t \leq 40 \text{ s}, \\ 0,3490 \text{ rad}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (17)$$

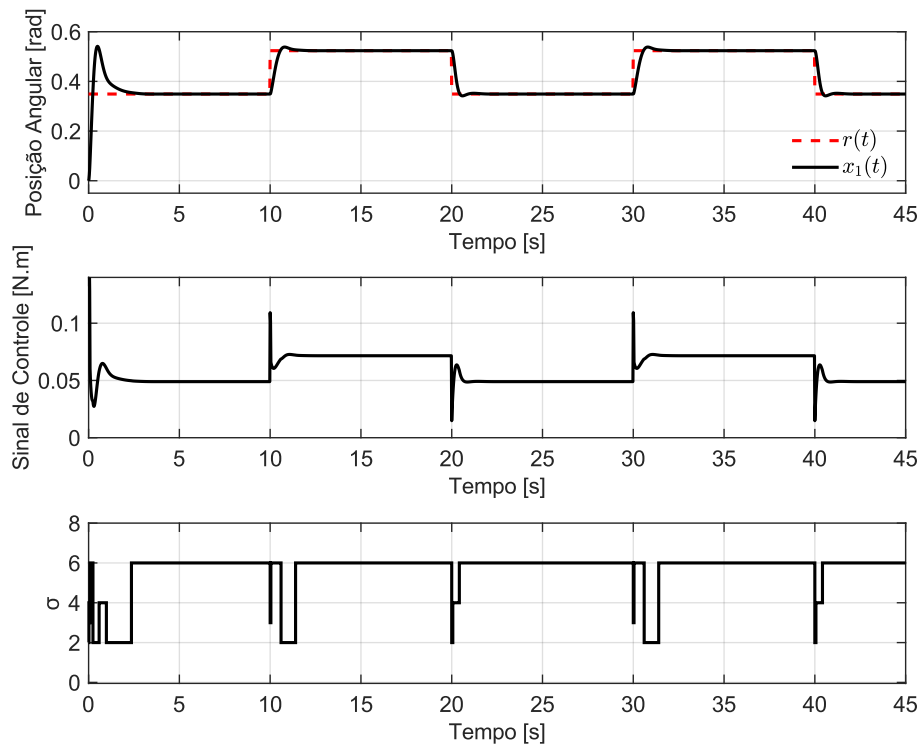
Figura 3 – Resposta temporal simulada do sistema Aeropêndulo (1) em malha fechada com a lei de controle chaveada (12) e (14) e ganhos (15) com $u_{0,mínimo} = 0,0397$: posição angular, sinal de controle e índice de chaveamento σ .



Fonte: elaborado pelos autores.

A resposta temporal do sistema Aeropêndulo em malha fechada com a lei de controle chaveada é mostrada nas Figuras 3 e 4. Nelas o índice de chaveamento σ corresponde ao ganho de realimentação K_{σ} , que é o utilizado a cada momento, escolhido dentre os ganhos apresentados em (15). Note que mesmo com o erro no sinal de controle inicial u_0 , o controlador com ação integral foi capaz de posicionar o sistema na posição desejada.

Figura 4 – Resposta temporal simulada do sistema Aeropêndulo (1) em malha fechada com a lei de controle chaveada (12) e (14) e ganhos (15) com $u_{0\text{máximo}} = 0,1047$: posição angular, sinal de controle e índice de chaveamento σ .



Fonte: elaborado pelos autores.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentou-se o modelo não linear do sistema Aeropêndulo por meio do somatório de torques e o modelo linearizado do sistema em torno do ponto de operação, através da série de Taylor. Posteriormente, levando em consideração o modelo linear do sistema, acrescentou-se uma nova variável de estado, com o intuito de remover o problema do erro de regime permanente do sistema. Além disso, este trabalho considerou que os parâmetros do modelo aumentado possuem incertezas, para o projeto do controle robusto. Em seguida, utilizando o Teorema 1, que possui condições que garantem a taxa de decaimento do sistema, o Teorema 2, para restrição na norma do controlador, e o Teorema 3, que define uma lei de controle chaveada, chegou-se aos resultados apresentados na seção anterior.

Os resultados de simulação mostraram que o controlador desempenhou satisfatoriamente os requisitos de projeto, os quais foram a robustez do sistema

(por meio da variação dos parâmetros do sistema), a rápida estabilização do sistema (taxa de decaimento), adequação do sinal de controle à implementação (restrição na norma do ganho de realimentação) e a troca de ganhos (lei de controle chaveado). A parcela de ação integral sobre o erro de rastreamento foi eficaz na supressão de incertezas casadas e constantes, garantindo o seguimento de referência mesmo com erro no sinal de controle inicial. Em trabalhos futuros outras técnicas de chaveamento poderão ser aplicadas para os ganhos, bem como outras restrições de projeto podem ser consideradas, além da implementação no protótipo real. Uma análise teórica mais profunda sobre a obtenção de um erro de regime nulo, empregando a lei de controle chaveada descrita em (12), é também um assunto para pesquisas futuras.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS-UNESP) e ao Instituto Federal do Paraná (IFPR), pelo apoio financeiro e pelo suporte no desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ALVES, Uiliam N. L. T.; TEIXEIRA, Marcelo C. M.; OLIVEIRA, Diogo R.; CARDIM, Rodrigo; ASSUNÇÃO, Edvaldo. Sobre o controle chaveado de sistemas não lineares incertos com saturação no atuador. **Anais do XXI Congresso Brasileiro de Automática**. Vitoria – ES: Sociedade Brasileira Automática - SBA, 2016.

BISPO, Vitor H. S.; CAMARGO, Lucas C.; YAMANAKA, Hugo F.; BISPO, Carlos A. S.; BREGANON, Ricardo; ALVES, Uiliam N. L. T. Controle de um sistema viga-hélice através de servomecanismo via alocação de polos. **Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão**. Paranaguá, PR, v. 7, n. 7, 2022.

BOYD, Stephen; EL GHAOUI, Laurent; FERON, Eric; BALAKRISHNAN, Venkataramanan. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

BREGANON, Ricardo; ALVES, Uiliam N. L. T.; ALMEIDA, João P. L. S.; RIBEIRO, Fernando S. F.; MENDONÇA, Márcio; PALÁCIOS, Rodrigo H. C.; MONTEZUMA, Marcio A. F. Loop-shaping \mathcal{H}_∞ control of an aeropendulum model. **International Journal of Applied Mechanics and Engineering (IJAME)**, Warsaw, Poland, v. 26, n. 4, 2021.

Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão. Paranaguá, PR, v.9, n.1, 2024.

DEAECTO, Grace S.; GEROMEL, Jose C.; DAAFOUZ, Jamal. Switched state-feedback control for continuous timevarying polytopic systems. **International Journal of Control**, Oxfordshire, v. 84, n. 9, p. 1500-1508, Sep, 2011.

ENIKOV, Eniko T.; CAMPA, Giampiero. Mechatronic aeropendulum: demonstration of linear and nonlinear feedback control principles with matlab/simulink real-time windows target. **IEEE transactions on education**, v. 55, n. 4, p. 538-545, 2012.

GEROMEL, José C. **Differential linear matrix inequalities**. Sampled-Data Systems Filtering and Control. Springer Nature, 2023.

JOB, Mila M.; JOSE, Subha S. H. Modeling and control of mechatronic aeropendulum. **International Conference on Innovations in Information, Embedded and Communication Systems (ICIIECS)**, p. 1-5, 2015.

KAYACAN, Erkan; FOSSEN, Thor I. Feedback linearization control for systems with mismatched uncertainties via disturbance observers. **Asian Journal of Control**, v. 21, n. 3, p. 1064-1076, 2019.

LIBERZON, Daniel. **Switching in systems and control**. Boston: Birkhauser, 2003.

LÖFBERG, Johan. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. **IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)**. IEEE, p. 284-289, 2004.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. 5 ed. São Paulo: Pearson, 2010.

MANESCO, Rodolpho M.; SILVA, João H. P.; MOREIRA, Manoel R.; BUZACHERO, Luiz F. S.; SILVA, Emerson R. P. da; ASSUNÇÃO, Edvaldo; TEIXEIRA, Marcelo C. M.; GALVÃO, Roberto K. H. Estabilidade robusta Hoo de sistemas lineares: uma implementação em um helicóptero 3-DOF de bancada. **Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática**. Campina Grande – PB: Sociedade Brasileira Automática - SBA, 2012.

MEHNDIRATTA, Mohit; KAYACAN, Erkan; REYHANOGLU, Mahmut; KAYACAN, Erdal. Robust tracking control of aerial robots via a simple learning strategy-based feedback linearization. **IEEE Access**. v. 8, n. 2019. p. 1653-1669, 2019.

ŠILJAK, Dragoslav D.; STIPANOVIĆ, Dušan M. Robust stabilization of nonlinear systems: the LMI approach. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 6, n. 5, p. 461-493, jun. 2000.

SILVA, Hyago R.; CARDIM, Rodrigo; TEIXEIRA, Marcelo C.; ASSUNÇÃO, Edvaldo; RAMOS, Igor T. Switched control and tracking application in

aeropendulum system using fuzzy models. **IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)**, p. 1-6, 2021.

SLOTINE, Jean-Jacques E.; LI, Weiping. **Applied nonlinear control**. Englewood Cliffs: Prentice Hall; 1991.

SOUZA, Wallyson A.; TEIXEIRA, Marcelo C. M.; SANTIM, Máira P. A.; CARDIM, Rodrigo; ASSUNÇÃO, Edvaldo. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. **Mathematical Problems in Engineering**, 2013.

STURM, Jos F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization methods and software**, v. 11, n. 1 - 4, p. 625-653, 1999.

TANAKA, Kazuo; IKEDA, Takayuki; WANG, Hua O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 6, n. 2, p. 250-265, may, 1998.

TEIXEIRA, Marcelo C. M.; SILVA, Neusa A. P.; ASSUNÇÃO, Edvaldo; MACHADO, Erica R. Design of fuzzy regulators with optimal initial conditions compensation. **IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS**, Vancouver, IEEE, p. 84-91, 2006.

YAMANAKA, Hugo F.; BISPO, Carlos A. S.; BREGANON, Ricardo; RIBEIRO, Fernando S. F.; ALMEIDA, João P. L. S.; ALVES, Uiliam N. L. T. Construção e controle seguidor via LQR de um sistema aeropêndulo. **Anais do XXIV Congresso Brasileiro de Automática**. Fortaleza – CE: Sociedade Brasileira Automática - SBA, 2022a.

YAMANAKA, Hugo F.; BISPO, Carlos A. S.; RIBEIRO, Fernando S. F.; ALMEIDA, João P. L. S.; BREGANON, Ricardo; ALVES, Uiliam N. L. T. Controle seguidor de referência via LMIs de um sistema aeropêndulo. **Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão**. Paranaguá, PR, v. 7, n. 7, 2022b.

ZHOU, Kemin; DOYLE, John C. **Essentials of robust control**. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall, 1998.