


CONTROLE SEGUIDOR ROBUSTO DE UM SISTEMA VIGA- HÉLICE VIA DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

ROBUST TRACKING CONTROL OF A PROPELLER-BEAM SYSTEM VIA LINEAR MATRIX INEQUALITIES

Vitor Hugo de Souza Bispo¹ 

Lucas Carvalho de Camargo² 

Ricardo Breganon³ 

Uiliam Nelson Lenzion Tomaz Alves⁴ 

Resumo: O presente trabalho trata do projeto de um controlador para um sistema Viga-Hélice capaz de seguir uma referência desejada, garantindo sua estabilidade mesmo quando existem incertezas na planta. A técnica escolhida para o projeto do controlador foi o seguidor de referência via Desigualdades Matriciais Lineares. Inicialmente, é feita uma revisão teórica sobre controle seguidor de referência e Desigualdades Matriciais Lineares. Em seguida, são apresentados conceitos fundamentais sobre o sistema Viga-Hélice e seu modelo matemático, permitindo assim a exposição da metodologia empregada para projetar o controlador robusto. Por fim, foram realizados simulações e testes com um protótipo de bancada. Os resultados obtidos mostram que é possível projetar um controlador robusto para um sistema Viga-Hélice utilizando Desigualdades Matriciais Lineares, mesmo quando sujeito a restrições de projeto, tais como restrição na norma do ganho do controlador e taxa de decaimento. O controlador projetado apresentou desempenho adequado na presença de incertezas no modelo, garantindo a estabilidade do sistema e seguindo a referência desejada de forma eficiente.

Palavras-chave: Sistema Viga-Hélice. Controle Seguidor de Referência. Desigualdades Matriciais Lineares. Controle Robusto.

Abstract: This paper focuses on developing a controller for a Propeller-Beam system capable of accurately tracking a desired reference while maintaining stability in the presence of uncertainties. We chose the reference tracking technique through Linear Matrix Inequalities for this controller. Firstly, we provide a theoretical overview of the reference tracking control and Linear Matrix Inequalities. Following that, we introduce fundamental concepts about the Propeller-Beam system and its mathematical model, explaining the methodology used to design the robust controller. Finally, Simulations and tests were conducted using a bench prototype. The results demonstrate that designing a robust controller for a Propeller-Beam system is possible using Linear Matrix Inequalities, even when facing design constraints such as upper bounds on the controller gain's

¹Discente do curso de Engenharia de Controle e Automação, IFPR, Jacarezinho, Paraná, e-mail: vitor7181@gmail.com.

²Discente do curso de Engenharia de Controle e Automação, IFPR, Jacarezinho, Paraná, e-mail: lucasxz.our@gmail.com.

³Doutor em Engenharia Mecânica, IFPR, Jacarezinho, Paraná, e-mail: ricardo.breganon@ifpr.edu.br.

⁴Doutor em Engenharia Elétrica, IFPR, Jacarezinho, Paraná, e-mail: uiliam.alves@ifpr.edu.br.

norm and a specified decay rate. The designed controller performed well in the presence of model uncertainties, ensuring system stability and effectively tracking the desired reference.

Keywords: Propeller-Beam System. Tracking Control. Linear Matrix Inequalities. Robust Control.

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas tipo pêndulo são problemas clássicos estudados na área de controle. Estes sistemas são altamente relevantes para a engenharia de controle, uma vez que envolvem uma dinâmica complexa e desafiadora para a implementação de estratégias de controle eficazes. O objetivo dos sistemas tipo pêndulo está em controlar o ângulo de uma haste com relação ao plano horizontal (GONÇALVES, 2019). Existem diversas variações de pêndulos, como pêndulo invertido sobre carro (OGATA, 2010), Aeropêndulo (BREGANON *et al.*, 2021), pêndulo Furuta (ALVES *et al.*, 2022), Viga-Hélice (BISPO *et al.*, 2022), entre outras. Uma característica desses sistemas está na possibilidade de serem aproximados por modelos lineares em torno de um ponto de operação (ENIKOV e CAMPA, 2012; JOB e JOSE, 2015).

Neste trabalho é proposto o projeto, simulação e implementação de um controlador robusto para o sistema Viga-Hélice, utilizando o *software* MATLAB®. O sistema Viga-Hélice se trata de um sistema tipo pêndulo e seu objetivo está em controlar e estabilizar uma haste em torno de uma referência desejada. A implementação do controlador projetado foi realizada no Laboratório de Automação e Controle do Instituto Federal do Paraná – campus Jacarezinho, onde se encontra o protótipo do sistema utilizado. A planta é descrita a partir de seu modelo matemático, com base em seu diagrama de forças. O modelo foi representado em espaço de estados para que fosse possível o projeto do controlador desejado.

A técnica de controle escolhida para garantir a estabilidade do sistema foi o controle seguidor de referência baseado em Desigualdades Matriciais Lineares (ou *Linear Matrix Inequalities*, ou ainda LMIs). As LMIs são uma das mais importantes ferramentas matemáticas introduzidas em controle e teoria de sistemas (LOFBERG, 2004). A principal vantagem dessa ferramenta está na busca de soluções para diversos problemas em controle, como garantia de estabilidade, otimização, solução para projetos com restrições, modelos com incertezas, entre outros. Para um problema formulado usando LMIs, não será buscado apenas uma solução, mas também será buscado como resolvê-lo de forma eficiente (LOFBERG, 2004).

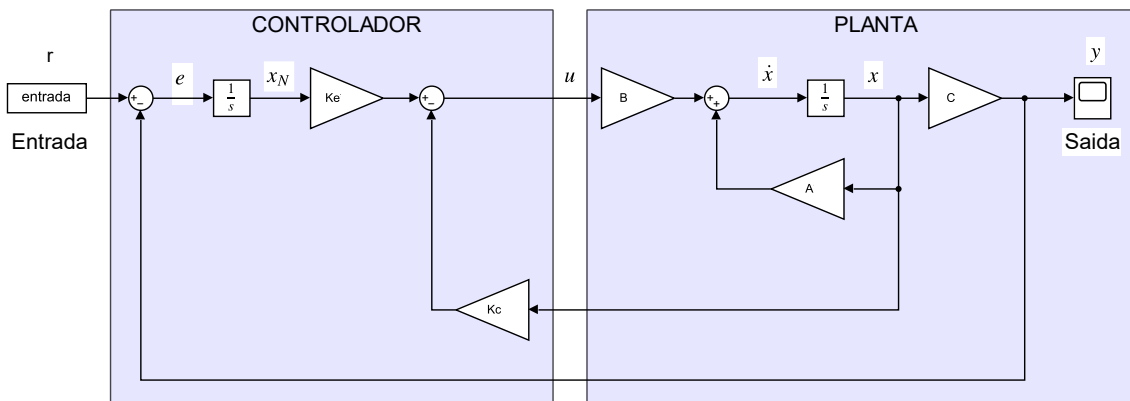
2 CONTROLE SEGUIDOR DE REFERÊNCIA

O controle seguidor de referência, também chamado na literatura de controle integral (NISE, 2018) ou servomecanismo (OGATA, 2010), se trata de uma técnica que surge a partir do controle com realimentação de estado, porém com o acréscimo de um caminho de realimentação na saída do sistema para formar um erro, e , o qual é conectado a planta controlada através de um integrador. O integrador aumenta o tipo do sistema em uma ordem e reduz o erro finito a zero (NISE, 2018). Considere um sistema dado pela dinâmica

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu; \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (1)$$

Na Figura 1 é apresentado o diagrama de blocos do controle seguidor para um sistema com uma entrada de controle e uma saída de interesse descrito por (1). Observe que após o integrador existe uma nova variável de estado x_N . A derivada de x_N , se trata do erro, ou seja, a diferença entre referência desejada e saída do sistema.

Figura 1 – Diagrama de blocos do controle seguidor de referência.



Fonte: Adaptado de Bispo *et al.* (2022).

A partir do diagrama presente na Figura 1, tem-se que

$$\dot{x}_N = e = r - Cx. \quad (2)$$

Assim, a partir de (1) e (2), as equações de estado de um sistema com controle seguidor de referência são dadas por (NISE, 2018):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu; \\ \dot{x}_N &= -Cx + r; \end{aligned} \quad (3)$$

$$y = Cx.$$

Admitindo que o sistema em malha fechada seja estável e que as variáveis de estado tendem a valores constantes em regime permanente ($x(\infty)$, $x_N(\infty)$, e $u(\infty)$), é possível representar o sistema (3) com matrizes e vetores aumentados (OGATA, 2010). Assim, tem-se a representação

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{x}_{Ne} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ x_{Ne} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \hat{u}(t) = A_N \begin{bmatrix} x_e \\ x_{Ne} \end{bmatrix} + B_N \hat{u}(t); \quad y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x_e \\ x_{Ne} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

sendo $x_e(t) = x(t) - x(\infty)$, $x_{Ne}(t) = x_N(t) - x_N(\infty)$, $\hat{u}(t) = u(t) - u(\infty)$ (veja Ogata (2010) para maiores detalhes). A lei de controle de realimentação de estado para o sistema aumentado (4) é apresentada no diagrama da Figura 1 e pode ser definida da seguinte maneira:

$$u = -K_c x + K_e x_N = -[K_c \quad -K_e] \begin{bmatrix} x \\ x_N \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} x \\ x_N \end{bmatrix}. \quad (5)$$

3 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

As Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) têm desempenhado um papel fundamental na análise e controle de sistemas dinâmicos por mais de um século (BOYD *et al.*, 1994). Essa abordagem matemática tem se destacado desde que Lyapunov publicou sua obra pioneira, conhecida atualmente como a Teoria de Lyapunov. Ele mostrou que a equação

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (6)$$

possui trajetórias que convergem para zero se, e somente se, existir uma matriz definida positiva P tal que

$$A^T P + PA < 0, \quad (7)$$

sendo $P > 0$. A Equação (7) é chamada desigualdade de Lyapunov, que é uma forma de LMI (BOYD *et al.*, 1994). Em especial, esta LMI pode ser solucionada escolhendo-se qualquer $Q = Q^T > 0$ e então resolvendo a equação linear $A^T P + PA = -Q$, para uma matriz $P = P^T$ definida positiva (OGATA, 2010).

As Desigualdades Matriciais Lineares são utilizadas para resolver problemas que envolvem muitas variáveis matriciais, de modo que se pode impor diversas restrições. As LMIs possuem a seguinte forma:

$$F(X) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (8)$$

onde $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]^T \in \mathfrak{R}^m$ é variável, e as matrizes simétricas $F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$, são dadas (BOYD *et al.*, 1994).

Em projetos de controladores é frequente encontrar requisitos em conflito como, por exemplo, a taxa de decaimento e norma do controlador (BUZACHERO *et al.*, 2010; CAMATA *et al.*, 2014). A taxa de decaimento está relacionada com a velocidade de convergência das variáveis de estado do sistema e, normalmente, quanto maior a taxa de decaimento maior a norma do controlador associado (ALVES *et al.*, 2015).

Neste trabalho o projeto do controlador leva em conta a taxa de decaimento e a restrição da norma do controlador, além da garantia de estabilidade para uma planta com incertezas em seu modelo.

A restrição da norma do controlador é importante por duas razões principais. Em primeiro lugar, ela garante que o controlador projetado seja fisicamente realizável, ou seja, as ações de controle não excedam os limites práticos. Quando a norma da matriz de realimentação de estado é alta, acaba dificultando sua implementação prática (BUZACHERO *et al.*, 2010). Em segundo, restringir a norma dos ganhos evita a amplificação excessiva do ruído e das incertezas, melhorando a robustez do sistema (BOYD *et al.*, 1994).

O uso das LMIs para este trabalho se dá por conta da possibilidade de escolha de variáveis matriciais, as quais através da positividade ou negatividade, é possível descrever restrições de projetos, permitindo que o projeto do controlador tenha diversos requisitos, como limite no sinal de entrada e saída, escolha da taxa de decaimento (YAMANAKA *et al.*, 2022b), robustez (ALVES *et al.*, 2015), restrição da norma do controlador (NOGUEIRA, 2016), entre outros. Resolver problemas descritos por LMIs é equivalente a encontrar uma solução para o problema original (BERTHOLIM, 2022).

Para encontrar os ganhos de realimentação K_C e o ganho do integrador K_e , levando em conta as restrições de projeto de interesse neste trabalho, utilizam-se o Teorema 1, em que são apresentadas condições de estabilidade e taxa de decaimento $\gamma > 0$, e o Teorema 2, que fornece condições que restringem

a norma dos ganhos de realimentação e do integrador. Nestes teoremas, n é a ordem do vetor de estado e m , a ordem do vetor de controle.

Teorema 1 (BOYD *et al.*, 1994) Caso exista um escalar $\gamma > 0$, uma matriz $M \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tais que

$$XA^T - M^T B^T + AX - BM + 2\gamma X < 0, \quad (9)$$

então a lei de controle (5), sendo $K = MX^{-1}$, torna o sistema (4) estável e com taxa de decaimento maior ou igual a γ .

Teorema 2 (SILJAK e STIPANOVIC, 2000) Assumindo que as condições do Teorema 1 sejam satisfeitas, a restrição $KK^T < \eta^2 \mu I_m$, sendo η e μ constantes positivas, e I_m a matriz identidade de ordem m , é atendida caso as LMIs

$$\begin{bmatrix} \mu I_n & M^T \\ M & I_m \end{bmatrix} > 0 \text{ e } \begin{bmatrix} \eta I_n & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} > 0, \quad (10)$$

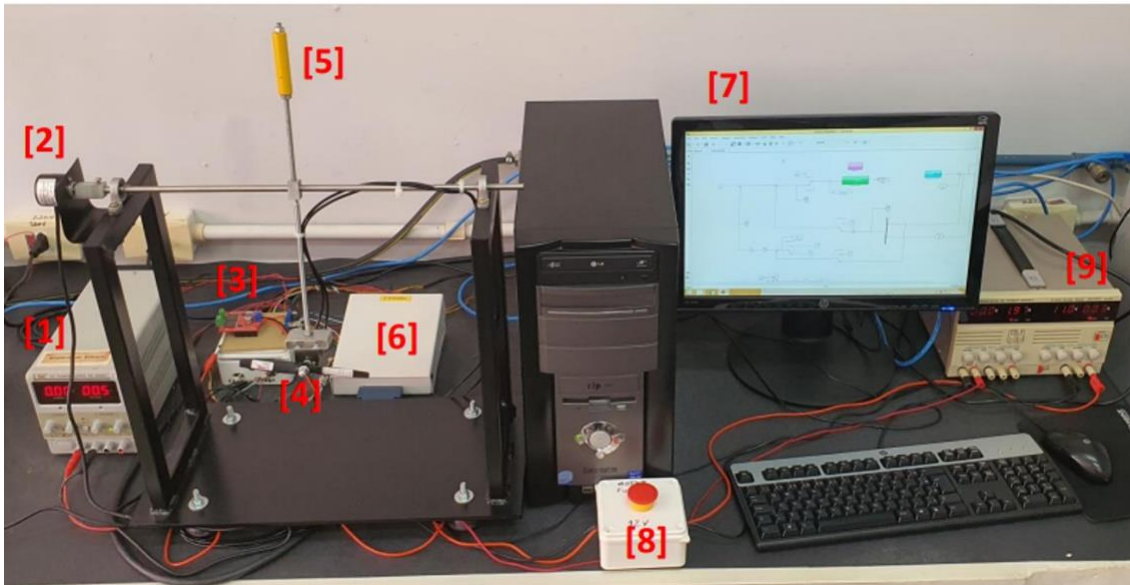
sejam satisfeitas, sendo I_n a matriz identidade de ordem n , em conjunto com as LMIs (9).

4 SISTEMA VIGA-HÉLICE

O sistema Viga-Hélice se trata de um sistema tipo pêndulo no qual o objetivo é regular e manter uma haste em torno de um ponto de referência desejado. Na Figura 2 é possível observar uma imagem do protótipo real, que se encontra no Laboratório de Automação e Controle do Instituto Federal do Paraná (IFPR) – Jacarezinho. Os componentes do protótipo de sistema Viga-Hélice são identificados por números e detalhados na Tabela 1.

A primeira etapa no projeto de um sistema de controle é determinar o modelo matemático do sistema dinâmico a ser controlado (FRIEDLAND, 1996). Para este fim, utilizam-se as leis físicas que governam o sistema dinâmico em questão, que, para o sistema Viga-Hélice, são as leis de Newton para rotação. Na Figura 3 é possível observar o diagrama de corpo livre do sistema Viga-Hélice.

Figura 2 – Protótipo do sistema Viga-Hélice construído no Laboratório de Automação e Controle do Instituto Federal do Paraná (IFPR) – Jacarezinho.



Fonte: Yamanaka *et al.* (2022a).

Tabela 1 – Componentes do protótipo Viga-Hélice.

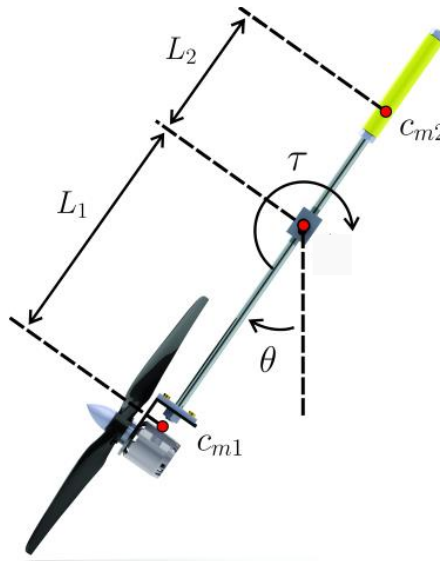
Número	Descrição
[1]	Fonte 5 V para alimentar o encoder.
[2]	Encoder rotacional incremental LPD 3806-600BM-G5-24C.
[3]	Ponte H Monster Motor Shield VNH3ASP30.
[4]	Conjunto propulsor: Motor + Hélice de 6" x 3,5.
[5]	Contrapeso com massa de 57,33 g.
[6]	Bloco de conectores para placa de aquisição de dados da fabricante National Instruments®, modelo PCI-6602.
[7]	Computador Intel Core 2 Duo E8600 3,33 GHz, com 2 GB de RAM.
[8]	Botão de emergência do sistema.
[9]	Fonte 12V para alimentar o conjunto propulsor.

Fonte: Yamanaka *et al.* (2022a).

É possível obter o modelo matemático do sistema representado em equação diferencial fazendo o somatório dos torques expressos no diagrama de corpo livre mostrados na Figura 3. Assim, segue que

$$I\ddot{\theta} = m_2gL_2\text{sen}(\theta) - m_1gL_1\text{sen}(\theta) - b\dot{\theta} + \tau, \quad (11)$$

Figura 3 – Diagrama de corpo livre do sistema Viga-Hélice.



Fonte: Adaptado de Yamanaka *et al.* (2022a).

sendo θ o ângulo da haste medido pelo encoder, $m_1 = 0,1183 \text{ kg}$ a massa do conjunto propulsor, $m_2 = 0,1086 \text{ kg}$ a massa total do contrapeso, $L_1 = 0,2019 \text{ m}$ a distância do centro de massa da haste com o motor e hélice até o eixo de rotação, $L_2 = 0,0856 \text{ m}$ a distância do centro de massa do contrapeso até o eixo de rotação, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ a aceleração da gravidade, $I = 0,0065 \text{ kg.m}^2$ o momento de inercia total, $b = 0,0098 \text{ Nms/rad}$ o coeficiente de atrito viscoso, e τ o torque realizado pelo conjunto propulsor.

Para o projeto do controlador, a Equação (11) deve ser representada em espaço de estados e linearizada em torno de um ponto de operação. Considerou-se o ângulo de operação $\theta_0 = 30^\circ$, as variáveis de estado $x_1 = \Delta\theta$, a variação do ângulo em torno de θ_0 , também considerada como saída do sistema, e $x_2 = \dot{\theta}$, a velocidade angular da haste do pêndulo. O sinal de controle do modelo linearizado é $u = \Delta\tau = \tau - \tau_0$, sendo τ o torque aplicado ao sistema e τ_0 o torque necessário para estabilizar a haste na posição angular θ_0 . Após o procedimento de linearização, o seguinte modelo em espaço de estados foi obtido:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(m_2 L_2 - m_1 L_1) g \cos(30^\circ)}{I} & -\frac{b}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} u; \quad (12)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

5 CONTROLE COM INCERTEZAS POLITÓPICAS

Para modelar um sistema Viga-Hélice com incertezas, será utilizado o modelo linearizado (12) e assumido que existem incertezas nas constantes do modelo. Essas incertezas serão representadas por combinações convexas para que possam ser incluídas nas condições em forma de Desigualdades Matriciais Lineares. O objetivo é solucionar as LMIs formadas a partir de matrizes conhecidas, tais que o modelo incerto do sistema seja representado por uma combinação convexa destas matrizes conhecidas. Assim, com a solução destas LMIs, é possível projetar um controlador que garanta a estabilidade do sistema e seja capaz fazer o sistema seguir uma referência mesmo com incertezas no modelo.

Considere um sistema de segunda ordem descrito por (1) sujeito a incertezas, sendo A e B matrizes não precisamente conhecidas dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}, \quad (13)$$

em que

$$a_1 \leq a \leq a_2, \quad b_1 \leq b \leq b_2, \quad c_1 \leq c \leq c_2, \quad (14)$$

sendo a_i , b_i e c_i os valores máximos e mínimos de cada valor incerto.

Define-se politopo de incertezas como um espaço paramétrico que pode representar uma faixa de valores possíveis para os parâmetros incertos de A e B . Ele é formado pela combinação convexa de vértices considerando os valores máximos e mínimos dos parâmetros incertos em (14). Matematicamente é possível expressar o politopo convexo da seguinte maneira (LEITE *et al.*, 2004):

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i, \quad B(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_i \geq 0. \quad (15)$$

com $r = 2^s$, sendo s o número de incertezas distintas no modelo (13). Considerando as incertezas em (14), tem-se que $r = 2^3 = 8$.

O sistema incerto (1) e (13) pode então ser representado utilizando a combinação convexa em (15) como (BOYD *et al.*, 1994):

$$\dot{x} = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \quad (16)$$

sendo $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ o vetor de estado do sistema, $u(t) \in \mathfrak{R}$ o sinal de controle.

Assumindo a lei de controle apresentada em (5) e que o sistema incerto (16) está sujeito a uma certa taxa de decaimento, tem-se o Teorema 3. Neste teorema, n é a ordem do vetor de estado e m , a ordem do vetor de controle.

Teorema 3 (BOYD *et al.*, 1994) Considere o sistema descrito por (15)-(16). Caso exista um escalar $\gamma > 0$, uma matriz $M \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tais que

$$XA_i^T - M^T B_i^T + A_i X - B_i M + 2\gamma X < 0, \quad (17)$$

para todo $i = 1$ até r , então a lei de controle (5), sendo $K = MX^{-1}$, torna o sistema (15)-(16) estável e com taxa de decaimento maior ou igual a γ .

Tabela 2 – Vértices do politopo e suas respectivas LMIs.

$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$	$XA_1^T - M^T B_1^T + A_1 X - B_1 M + 2\gamma X < 0$
$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \end{bmatrix}$	$XA_2^T - M^T B_2^T + A_2 X - B_2 M + 2\gamma X < 0$
$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & b_1 \end{bmatrix}; B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$	$XA_3^T - M^T B_3^T + A_3 X - B_3 M + 2\gamma X < 0$
$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & b_1 \end{bmatrix}; B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \end{bmatrix}$	$XA_4^T - M^T B_4^T + A_4 X - B_4 M + 2\gamma X < 0$
$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & b_2 \end{bmatrix}; B_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$	$XA_5^T - M^T B_5^T + A_5 X - B_5 M + 2\gamma X < 0$
$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & b_2 \end{bmatrix}; B_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \end{bmatrix}$	$XA_6^T - M^T B_6^T + A_6 X - B_6 M + 2\gamma X < 0$
$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}; B_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$	$XA_7^T - M^T B_7^T + A_7 X - B_7 M + 2\gamma X < 0$
$A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}; B_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \end{bmatrix}$	$XA_8^T - M^T B_8^T + A_8 X - B_8 M + 2\gamma X < 0$

Fonte: Dos autores.

Representando as matrizes em (13) com as incertezas (14) através da combinação convexa (15) tem-se 8 matrizes. Consequentemente, a partir do Teorema 3, 8 LMIs descritas a partir de (17) deverão ser resolvidas simultaneamente para a estabilidade do sistema incerto com taxa de decaimento. Para restringir a norma do controlador, somam-se estas 8 LMIs com as LMIs do Teorema 2 descritas por (10). Na Tabela 2 são apresentadas as matrizes da representação politópica, chamadas de vértices do politopo, e as respectivas LMIs advindas do Teorema 3.

6 PROJETO DO CONTROLADOR E RESULTADOS OBTIDOS

Nesta seção serão apresentados o projeto do controlador e os resultados obtidos. Na Figura 4 é possível observar o diagrama de simulação, utilizando o modelo não linear (11), e na Figura 5, o diagrama utilizado no controle do protótipo. Observe que, diferente do diagrama apresentado na Figura 1, a saída do modelo Viga-Hélice se trata de Δx_1 e Δx_2 e a entrada é $u = \Delta\tau + \tau_0$, em que τ_0 é o sinal de controle no ponto de equilíbrio do sistema e $\Delta\tau$ é o sinal de controle proveniente do controlador. Define-se um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico como sendo o ponto em que o sistema permanece estacionário na medida em que o tempo evolui (SAVI, 2006), ou seja, para um sistema descrito por $\dot{x} = f(x)$, $x \in R^n$, tem-se que $f(x_0) = 0$ no ponto de equilíbrio x_0 .

Para sistemas não lineares nos quais se deseja aplicar um controlador seguidor de referência baseado em modelo linear é necessário adotar um ponto de operação como referência. Isso ocorre porque os sistemas não lineares podem apresentar dinâmicas diferentes em diferentes regiões de operação. Com isso, para o controle do sistema foi adotado um ponto de operação para o Viga-Hélice denominado $\theta_0 = 30^\circ$. Assim, o controlador aplicou um sinal PWM τ_0 que provocou um movimento na hélice do sistema. Após o sistema estabilizar, θ_0 passou a ser um ponto de operação do sistema.

O propósito deste trabalho consiste em desenvolver um controlador para um sistema Viga-Hélice capaz de seguir uma referência desejada, assegurando a estabilidade do sistema mesmo na presença de incertezas na planta. Então, por se tratar de uma planta que apresenta incertezas, é necessário considerar um intervalo de valores para a , b e c em (13) e (14). Para a simulação foram utilizados os valores nominais dos parâmetros do protótipo real, enquanto para

que no projeto do controlador foi considerada uma variação $\pm 15\%$ nos parâmetros a , b e c do modelo (13). Com isto, tem-se os parâmetros em (14) como apresentados na Tabela 3.

Desta forma, as LMIs da Tabela 2, terão os valores de a , b e c definidos a partir da Tabela 3. Além disso, note que para o projeto do controle seguidor consideraram-se as matrizes A_N e B_N definidas em (4). Assim, em cada linha da Tabela 2, as matrizes A_i e B_i foram substituídas por A_{Ni} e B_{Ni} definidas em (4) com a utilização de A_i e B_i no lugar de A e B .

Tabela 3 – Intervalo de incertezas consideradas no sistema Viga-Hélice.

a		b		c	
a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2
-3,9118	-2,8907	-1,7354	-1,2827	130,8897	177,0861

Fonte: Dos autores.

Neste trabalho, para soluções de LMIs apresentados na Tabela 2 e no Teorema 2, utilizou-se o *software* MATLAB®, um programa de computador especializado e otimizado para cálculos científicos e de engenharia (CHAPMAN, 2003), em conjunto com o *solver* LMILab (GAHINET *et al.*, 1994) e o *toolbox* Yalmip (LOFBERG, 2004), um pacote gratuito que facilita a representação de problemas de otimização do MATLAB®. Definindo as constantes, $\gamma = 0,85$, $\eta = 1.800$ e $\mu = 1$ na desigualdade (10), referente ao Teorema 2, obteve-se os seguintes ganhos para a lei de controle (5):

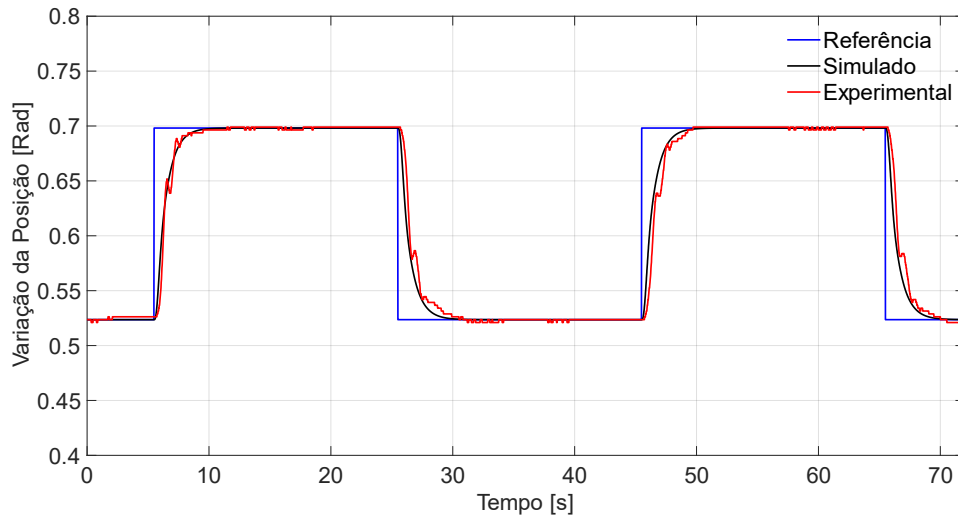
$$K = [K_c \mid -K_e] = [0,2342 \ 0,0482 \mid 0,3170]. \quad (18)$$

Na Figura 6 é possível analisar o ângulo $\theta(t)$ para o sistema simulado e para o sistema real (apresentado na Figura 2), ambos em malha fechada com o controlador como mostrado na Figura 4 e na Figura 5. Na Figura 7 são apresentados os sinais de controle referente à simulação e ao experimento.

É possível observar, na Figura 7, que o sinal de controle para o sistema simulado e real apresentam amplitudes diferentes, mas possuem a mesma tendência, isso ocorre devido ruídos e não linearidades que são desconsiderados no momento da simulação. Mesmo assim, o controle foi capaz

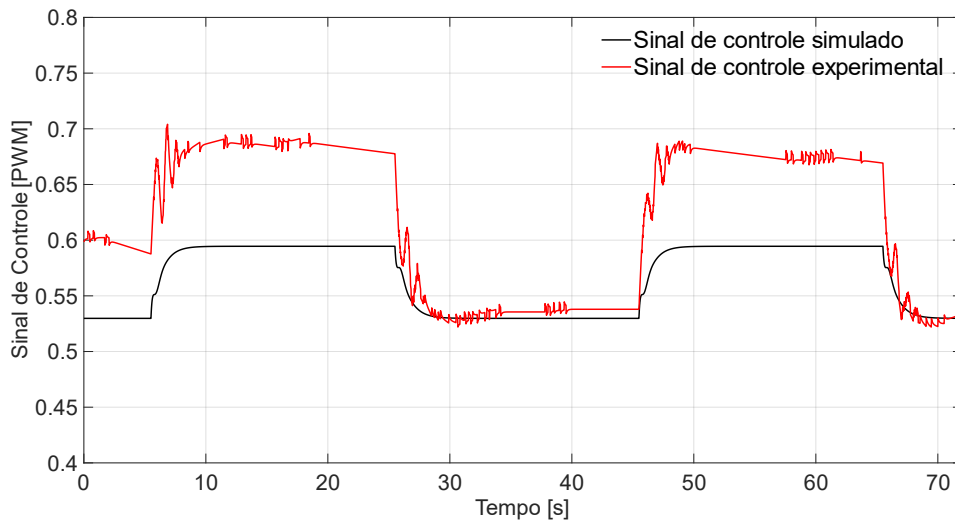
de atingir valores adequados para que a posição angular da haste fosse a mesma que a referência.

Figura 6 – Resposta do sistema simulado e real em malha fechada com o controlador.



Fonte: Dos autores.

Figura 7 – Sinal de controle para o sistema simulado e real em malha fechada com o controlador.



Fonte: Dos autores.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou o controle de um sistema Viga-Hélice via LMIs considerando incertezas na planta. A partir do estudo realizado foi possível concluir que a abordagem proposta se trata de uma ferramenta poderosa para solução de problemas de controle complexos. Através das LMIs foi possível estabelecer condições para o projeto de controladores robustos, tais como garantia de estabilidade, restrição da norma dos ganhos de realimentação e taxa de decaimento. Além disso, foi desenvolvido através do *software* MATLAB® um algoritmo eficiente para a solução dos problemas de otimização envolvidos no projeto do controlador.

Os resultados obtidos através do sistema simulado e do protótipo demonstram a eficácia do método utilizado, mostrando que o controlador foi capaz de fazer o sistema seguir a referência com precisão, garantindo estabilidade, mesmo diante de incertezas no modelo do sistema.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Instituto Federal do Paraná, pelo apoio financeiro e pelo suporte no desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ALVES, U. N. L. T.; OLIVEIRA, D. R.; CARNIATO, A. A.; TEIXEIRA, M. C. M. Controle de um Sistema Ball Balancer Utilizando LMIs no Projeto do Controlador. **Anais da III Mostra Científica, Cultural e Tecnológica-IFSP-PEP**. Presidente Epitácio – SP, p. 57-58, 2015.

ALVES, U. N. L. T.; BREGANON, R.; PIVOVAR, L. E.; DE ALMEIDA, J. P. L. S.; BARBARA, G. V.; MENDONÇA, M.; PALÁCIOS, R. H. C. Discrete-Time \mathcal{H}_∞ Integral Control Via LMIs Applied to a Furuta Pendulum. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, v. 1, p. 1-12, 2022.

BERTHOLIM, I. O. **Identificação e Projeto de Controle para um Sistema Viga-Hélice Considerando Modelagem Fuzzy Takagi-Sugeno, Chaveamento e Restrições Via LMIs**. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Elétrica – Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira - SP, 2022.

BISPO, V. H. S.; DE CAMARGO, L. C.; YAMANAKA, H. F.; BISPO, C. A. S.; BREGANON, R.; ALVES, U. N. L. T. Controle de um Sistema Viga-Hélice Através de Servomecanismo via Alocação de Polos. **Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão**, v. 7, n. 7, 2022.

BREGANON, R.; ALVES, U. N. L. T.; RIBEIRO, F. S. F.; BARBARA, G. V.; ALMEIDA, J. P. L. S.; PIVOVAR, L. E.; MONTEZUMA, M. A. F.; MENDONÇA, M. Desenvolvimento de Sistemas de Pêndulos Invertidos Como Ferramentas Didáticas em Cursos de Engenharia de Controle e Automação. **Holos**, v. 5, n.37, 2021.

BOYD, S.; EL GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C.; FARIA, F. A.; SILVA, E. R. Implementações de Controladores Robustos, com Restrições de Taxa de Decaimento e Otimizados em Sistemas Sujeitos a Falhas. **Dincon'10 - 9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications**. Serra Negra – SP, 2010.

CAMATA, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; DA SILVA, E. R. P.; TEIXEIRA, M. C. M.; BUZARECHO, L. F. S.; ALVES, U. N. L. T.; DE OLIVEIRA, D. R. Implementação de Controlador Robusto para o Sistema Ball Balancer Sujeito a Falhas Estruturais. **Anais do XI Congresso Brasileiro de Automática**. Campina Grande – PB: Sociedade Brasileira Automática - SBA, 2014.

CHAPMAN, S. J. **Programação em MATLAB para engenheiros**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

ENIKOV, E. T.; CAMPA, G. Mechatronic Aeropendulum: Demonstration of Linear and Nonlinear Feedback Control Principles with MatLab/Simulink Real-Time Windows Target. **IEEE Transactions on Education**, Piscataway, v. 55, n. 4, p. 538-545, 2012.

FRIEDLAND, B. **Advanced Control Systems Design**. New Jersey-USA: Prentice-Hall, 1996.

GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. The LMI Control Toolbox. **Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control**. p. 2038-2041, 1994.

GONÇALVES, C. H. B. **Sintonia Ótima de Controladores PID Utilizando Técnicas de Modelagem Caixa-Cinza**: aplicação em um sistema viga-hélice. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira - SP, 2019.

JOB, M. M.; JOSE, P. S. H. Modeling and Control of Mechatronic Aeropendulum. **International Conference on Innovations in Information, Embedded and Communication Systems (ICIIECS)**. IEEE, 2015. p. 1-5.

LEITE, V. J.; MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, P. J. D.; OLIVEIRA, R. C.; RAMOS, D. C.; PERES, P. L. Estabilidade Robusta de Sistemas Lineares Através de Desigualdades Matriciais Lineares. **Revista Controle & Automação**, v. 15, p. 24-40, 2004.

LOFBERG, J. YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. **IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)**. IEEE, p. 284-289, 2004.

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 7 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

NOGUEIRA, L. G. M. **Projeto de Controle via LMIs Considerando Saturação no Atuador para uma Suspensão Ativa de Bancada**. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira - SP, 2016.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5 ed. São Paulo: Pearson, 2010.

SAVI, M. A. **Dinâmica Não-Linear e Caos**. 1 ed. Rio de Janeiro: E-PAPERS, 2006.

ŠILJAK, D. D.; STIPANOVIC, D. M. Robust Stabilization of Nonlinear Systems: The LMI Approach. **Mathematical problems in Engineering**, v. 6, n. 5, p. 461-493, 2000.

YAMANAKA, H. F.; BISPO, C. A. S.; BREGANON, R.; RIBEIRO, F. S. F.; ALMEIDA, J. P. L. S.; ALVES, U. N. L. T. Construção e Controle Seguidor Via LQR de Um Sistema Aeropêndulo. **Anais do XXIV Congresso Brasileiro de Automática**. Fortaleza - CE: Sociedade Brasileira Automática - SBA, 2022a.

YAMANAKA, H. F.; BISPO, C. A. S.; BREGANON, R.; RIBEIRO, F. S. F.; ALMEIDA, J. P. L. S.; ALVES, U. N. L. T. Controle Seguidor de Referência via LMIs de um Sistema Aeropêndulo. **Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão**, v. 7, n. 7, 2022b.