


ANÁLISE E SIMULAÇÃO DE UM CONTROLE HÍBRIDO *FUZZY*-PID APLICADO A UM MANIPULADOR ROBÓTICO DE UM GRAU DE LIBERDADE COM ELO FLEXÍVEL

ANALYSIS AND SIMULATION OF A HYBRID FUZZY-PID CONTROLLER APPLIED TO A ONE-DEGREE-OF-FREEDOM ROBOTIC MANIPULATOR WITH FLEXIBLE LINK

Israel Jorge Cárdenas Nuñez¹ 

Fabian A. Lara-Molina² 

Albert Willian Faria³ 

Resumo: Este estudo apresenta uma proposta alternativa às abordagens já consolidadas na literatura, direcionadas ao controle ativo para mitigação de vibrações em manipuladores robóticos. A metodologia desenvolvida tem como finalidade atuar de forma conjunta na correção do desvio posicional e na supressão das oscilações estruturais, por meio da aplicação de um controlador híbrido baseado em lógica *fuzzy* combinada com ação PID. Para a modelagem do sistema dinâmico, foi adotada a formulação de Lagrange associada à discretização via método dos elementos finitos. A fim de verificar os resultados obtidos nas simulações, um protótipo experimental foi construído. O trabalho detalha ainda a estrutura do controlador aplicado, com foco na redução de vibrações e no aprimoramento do desempenho posicional. Os resultados numéricos indicam uma melhoria significativa na resposta dinâmica do conjunto com a estratégia de controle proposta.

Palavras-chave: Manipulador Flexível. Controle *Fuzzy*. Dinâmica. Simulação. Vibrações.

Abstract: This study presents an alternative proposal to the approaches already consolidated in the literature, aimed at active control for mitigating vibrations in robotic manipulators. The developed methodology aims to act jointly in the correction of positional deviation and in the suppression of structural oscillations, through the application of a hybrid controller based on *fuzzy* logic combined with PID action. For the modeling of the dynamic system, the Lagrange formulation associated with discretization via the finite element method was adopted. In order to verify the results obtained in the simulations, an experimental prototype was built. The work also details the structure of the applied controller, focusing on the reduction of vibrations and the improvement of positional performance. The numerical results indicate a significant improvement in the dynamic response.

Keywords: Flexible Manipulator. Fuzzy Control. Dynamics. Simulation. Vibrations.

¹Dr., Universidade Federal do Triângulo Mineiro, israel.nunez@uftm.edu.br.

²Dr., Universidade Federal do Triângulo Mineiro, fabian.molina@uftm.edu.br.

³Dr., Universidade Federal do Triângulo Mineiro, albert.faria@uftm.edu.br.

1 Introdução

Os robôs manipuladores encontram ampla aplicação em diferentes áreas, incluindo procedimentos médicos e sistemas industriais. Contudo, a presença de ruídos ou ambientes não estruturados pode comprometer o desempenho, impactando negativamente o desempenho dessas aplicações. A execução de tarefas com sem erros de posicionamento e falhas é uma exigência dos manipuladores nessas aplicações (MOLINA, 2012). Como forma de superar esses desafios, a síntese de controladores para robôs contribui para o aprimoramento do desempenho dinâmico dos robôs. A aplicação de controle nos robôs resulta em um funcionamento mais eficiente dos mesmos (LARA-MOLINA et al., 2012).

Na literatura especializada, as principais estratégias adotadas para a modelagem de manipuladores com elos flexíveis podem ser agrupadas em quatro categorias distintas: o método dos elementos finitos (FEM) (LARA-MOLINA, 2022), os modelos de parâmetros concentrados (FRASER; DANIEL, 2012), a técnica de perturbação (ZHU et al., 2024) e o método dos modos assumidos (AMM) (GREEN; SASIADEK, 2003). Tais abordagens têm sido amplamente utilizadas para representar matematicamente o comportamento dinâmico de robôs com componentes flexíveis.

Os braços robôs compoem-se por partes mecânicas com flexibilidade estrutural, tais como transmissões com baixa rigidez; por exemplo, redutor harmônico. Adicionalmente, os elos de pequena seção transversal conferem flexibilidade estrutural (BRIOT; KHALIL, 2015). Estas transmissões adicionam elasticidade nos atuadores. Contudo, esse tipo de manipulador possui rigidez reduzida, o que provoca a ocorrência de vibrações durante seu funcionamento. Assim, chamados de robôs flexíveis, esses sistemas têm menos peso que os convencionais, exigindo uma potência menor dos atuadores na operação. Para assegurar o funcionamento sem falhas e manutenção eficiente, é fundamental compreender em profundidade a estrutura e o desempenho desses robôs. A melhora do funcionamento e para a minimização dos custos demanda a equação de movimento da estrutura (componentes mecânicos) nesse contexto para a elaboração de estimativas adequadas que ajudam significativamente.

A síntese dos controladores em braços robóticos têm possibilitado a expansão e a otimização de seu uso em diversas áreas. Diferentes abordagens vêm sendo empregadas para controlar os robôs manipuladores, incluindo métodos baseados que usam controle *fuzzy* (LARA-MOLINA; TAKANO; KOROISHI, 2015), controle preditivo (LARA-MOLINA et al., 2012; LARA-MOLINA et al., 2014) e controle robusto (COSTA et al., 2018), entre outros. A síntese do controle aplicado em robôs manipuladores é um campo de pesquisa bastante desenvolvido, principalmente para sistemas sem flexibilidade.

Várias abordagens de controle vêm sendo utilizadas para robôs com elos flexíveis (LI et al., 2024). Técnicas de *Reinforcement learning (RL)* foram aplicadas para controlar um robô Quanser que tem um par de elos com flexibilidade estrutural, apresentando resultados melhores que comparado com uma regra de controle proporcional-derivativa (SUN; XIE; SU, 2025). Metodologias de controle preditivo têm sido usadas para atenuar os efeitos da flexibilidade estrutural em robôs que tem elos elásticos baseado no modelamento com elementos finitos (GOLD; VÖLZ; GRAICHEN, 2022). O controle no robô flexível tem o propósito de aprimorar o desempenho do robô e este foi desenvolvido baseado em uma técnica que considera osciladores de Duffing e controle de vibrações (HUANG; JI, 2021). Finalmente, um controlador destinado a reduzir os desvios na posição a as vibrações foi implementado também no robô Quanser que possui um elo elástico (HE et al., 2020).

Este trabalho propõe uma abordagem alternativa às estratégias já apresentadas na literatura, visando a atenuação das vibrações estruturais em braços robóticos com flexibilidade no elo, ao mesmo tempo em que busca controlar e eliminar o erro no atuador por meio de um controle híbrido *fuzzy*-PID. Para esse fim, o modelamento dinâmico foi obtido mediante a técnica dos elementos finitos em conjunto com a equação de Lagrange. Posteriormente, um dispositivo do robô será construído para confirmar a validade das respostas do estudo numérico e das respostas experimentais. Apresenta-se, ainda, a técnica de controle empregado para reduzir as vibrações e controlar o erro posicional. Finalmente, os resultados numéricos evidenciam as melhorias proporcionadas pelo controle no desempenho dinâmico do sistema.

Este artigo está organizado em seis seções. A Seção 2 aborda a modelagem dinâmica do sistema, bem como a descrição da bancada experimental do manipulador com elo flexível. Na Seção 3, apresenta-se o esquema de controle híbrido *fuzzy*-PID, com foco na supressão de vibrações e na correção do erro de posição do atuador. Os resultados obtidos a partir da aplicação da estratégia de controle são discutidos na Seção 4. Por fim, a Seção 5 traz as considerações finais e sugestões para investigações futuras.

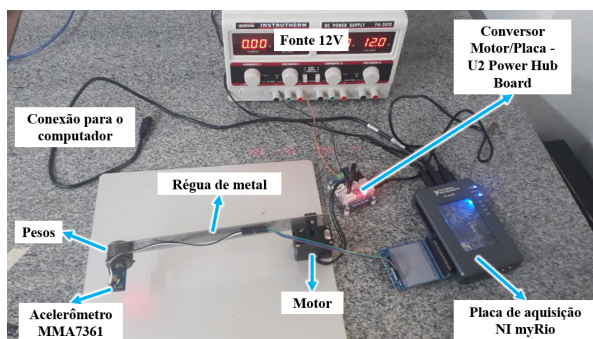
2 Robô com Flexibilidade no Elo

O procedimento para a obtenção da equação de movimento do robô é apresentado nesta seção. Também, a bancada experimental do robô com elo flexível é apresentada.

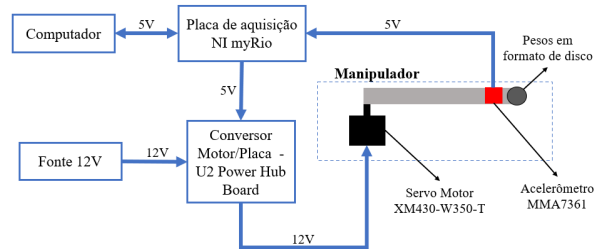
A simplificação do modelo equivalente para a síntese do controlador é descrita a partir do modelo é construído com equação de Lagrange e a técnica dos elementos finitos baseado em (USORO; NADIRA; MAHIL, 1986).

2.1 Bancada Experimental do Robô

A bancada experimental do robô é descrito nesta seção e ilustrado na Figura 1a. O movimento é proporcionado por um servomotor *Dynamixel* modelo XM430-W350-T. O acionamento do servomotor e a aquisição dos sinais dos sensores são realizados por meio do dispositivo de aquisição de sinais *NI myRio*. Para o elo com flexibilidade, empregou-se uma régua metálica com comprimento de 19,7 cm. Na ponta do elo, foi fixado um acelerômetro MMA7361, junto a uma massa adicional (disco). A alimentação do atuador é garantida por 12 volts. A ligação da placa *NI myRio* e o servomotor *Dynamixel* é feita utilizando a interface *U2 Power Hub Board*.



(a) Estruturação da bancada do robô.



(b) Representação do Sistema de Instrumentação.

Figura 1: Implementação da bancada do robô.

O funcionamento da bancada experimental ocorre conforme descrito a seguir. A Fig. 1b mostra o esquema das interligações dos componentes que formam o experimento. Primeiramente, a interface *MyRio* endereça os comandos ao servomotor através da interface *U2 Power Hub*. Depois, o computador transmite as configurações e as referências para a interface de aquisição de dados *NI MyRio* por meio do *software LabVIEW*. Por fim, esses dados são enviados de volta ao computador, onde são processados na obtenção dos resultados da bancada experimental. Durante o funcionamento do servomotor, a placa *MyRio* captura os sinais dos sensores — o acelerômetro instalado na ponta do elo e o encoder do servomotor.

2.2 Modelamento Dinâmico do Robô

O modelamento para obter a equação de movimento do robô apresentado na Figura 2. Este modelo obtém-se aplicando uma série de passos que são apresentados a seguir.

O robô tem um elo flexível único de comprimento l , segmentado em quatro elementos (ver Figura 2). Adicionalmente, está presente uma inércia no atuador, representada por I_{m1} , assim como uma massa m_{p1} fixada na ponta do elo. Com uma articulação rotacional τ_1 , o robô tem seus elementos indicados por $j = 1, \dots, 4$, totalizando $n_{1j} = 4$ elementos.

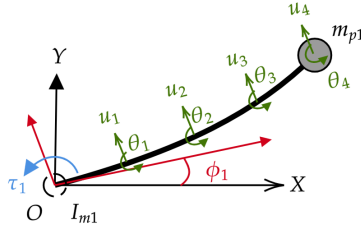


Figura 2: Diagrama esquemático do robô com um elo flexível.

1. Cinemática: relativa ao referencial O , a posição no espaço cartesiano \mathbf{r}_{1j} dos elementos no elo define-se por:

$$\mathbf{r}_{1j} = \mathbf{R}(\phi_1, z_1)\mathbf{r}_j = \begin{bmatrix} \cos(\phi_1) & -\sin(\phi_1) \\ \sin(\phi_1) & \cos(\phi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (j-1)l_{1j} + x_{1j} \\ y_{1j} \end{bmatrix} \quad (1)$$

r_j é a posição no espaço cartesiano do elemento $1j$ em relação a O_1 . Define-se $\mathbf{R}(\phi_1, z_1)$ como a matriz que representa a rotação de ϕ_1 (atuador) em torno do eixo z_1 no referencial O_1 . r_j varia entre 0 e l_{1j} , com $l_{1j} = \frac{l}{n_{1j}}$ o comprimento correspondente ao elemento $1j$.

De acordo com (INMAN, 2017), a deformação transversal y_{1j} (ver a Equação (2)) é determinado pelas funções interpoladoras $\Phi_k(x_{1j})$ com $k = 1$ a 4.

$$y_{ij}(x, t) = \sum_{k=1}^4 \Phi_k(x_{ij})\psi_{1j} \quad (2)$$

Conforme definido pelas expressões a seguir: $\Phi_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}$, $\Phi_2(x) = x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$, $\Phi_3(x) = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}$, $\Phi_4(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$. Neste contexto, $\Phi_k(x_{1j})$ correspondem às funções interpoladoras utilizadas para representar a solução dentro dos elementos.

$\psi_{1j} = \left[u_1 \ \theta_1 \ u_2 \ \theta_2 \ u_3 \ \theta_3 \ u_4 \ \theta_4 \right]$ definem as coordenadas generalizadas dos deslocamentos transversais e rotações do elemento respectivo. Assim, o vetor a seguir representa as coordenadas generalizadas elementares $1j$ $\mathbf{q}_{1j} = \left[\phi_1 \ \psi_{1j} \right]$. Neste contexto, u_{j-1} e u_j referem-se aos deslocamentos lineares do elemento $1j$, e θ_{j-1} e θ_j às suas rotações.

A Equação (3) fornece a expressão utilizada para calcular a velocidade nas coordenadas elementares na posição no espaço cartesiano.

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{1j}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}_{1j}}{\partial \mathbf{q}_{1j}} \dot{\mathbf{q}}_{1j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_{1j}}{\partial \phi_1} & \frac{\partial \mathbf{r}_{1j}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{r}_{1j}}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{1j} \quad (3)$$

com $\dot{\mathbf{q}}_{1j} = \left[\dot{\phi}_1 \ \dot{\psi}_{1j} \right]$.

2. Energia elementares: A energia elástica potencial decorrente da deformação transversal nos elementos do elo (V_{1j}). A Equação (4) apresenta as expressões que definem a energia total: energia cinética e energia potencial do robô. Portanto, a energia cinética do robô compõe-se por três termos: dos elementos do elo (T_{1j}), da inércia do atuador ($T_{I_{m1}}$), e da massa na ponta do elo ($T_{m_{p1}}$).

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{1j} = \frac{1}{2} \int_0^{l_{1j}} \rho A \left[\frac{\partial r_{1j}^T}{\partial t} \frac{\partial r_{1j}}{\partial t} \right] dx_{1j} \\ \quad = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{1j}^T \mathbf{M}_{1j} \dot{\mathbf{q}}_{1j} \\ T_{m_{p1}} = \frac{1}{2} m_{p1} [\dot{\mathbf{r}}_{1j}]^T [\dot{\mathbf{r}}_{1j}] \\ \quad = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{1j}^T \mathbf{M}_{m_{p1}} \dot{\mathbf{q}}_{1j} \\ T_{I_{m1}} = \frac{1}{2} I_{m1} \dot{\phi}_1^2 \\ V_{1j} = \frac{1}{2} \int_0^{l_{1j}} EI \left[\frac{\partial^2 y_{1j}}{\partial x_{1j}^2} \right]^T \left[\frac{\partial^2 y_{1j}}{\partial x_{1j}^2} \right] dx_{1j} \\ \quad = \frac{1}{2} \mathbf{q}_{1j}^T \mathbf{K}_{1j} \mathbf{q}_{1j} \end{array} \right. \quad (4)$$

3. Energia total: de acordo com a expressão na Equação (5), as expressões da energia cinética total e da energia potencial total do robô resultam da soma das energias elementares.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}_1 = \sum_{j=1}^{n_{1j}} T_{1j} + T_{m_{p1}} + T_{I_{m1}} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_1^T \tilde{\mathbf{M}}_1 \tilde{\mathbf{q}}_1 \\ \tilde{V}_1 = \sum_{j=1}^{n_{1j}} V_{1j} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_1^T \tilde{\mathbf{K}}_1 \tilde{\mathbf{q}}_1 \end{array} \right. \quad (5)$$

sendo $\tilde{\psi}_1$ o vetor dos deslocamentos transversais associados ao elo flexível. Assim, define-se o vetor de coordenadas generalizadas como $\tilde{\mathbf{q}}_1 = [\phi_1 \quad \tilde{\psi}_1]$

4. Restrições no contorno: não há deslocamento linear nem angular, resultando em $u_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$ porque o elo encontra-se ancorado na origem (é dizer, anexo ao atuador). Dessa forma, as seguintes expressões determinam a energia cinética e a energia potencial:

$$T_1 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_1^T \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 \quad V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{q}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{q}_1 \quad (6)$$

Com j variando de 1 a 4, a partir das matrizes elementares correspondentes \mathbf{M}_{1j} , $\mathbf{M}_{m_{p1}}$ e \mathbf{K}_{1j} são obtidos as matrizes globais de massa \mathbf{M}_1 e rigidez \mathbf{K}_1 .

5. Equação de Lagrange: Utilizando o princípio da mínima ação sobre o Lagrangiano, deriva-se a equação de movimento. Para isto, define-se o Lagrangiano \mathcal{L} como a energia total, calculada pela subtração de V_1 de T_1 , ou seja, $\mathcal{L} = T_1 - V_1$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_1} = \mathbf{f}_1 \quad (7)$$

onde \mathbf{f} é a força externa aplicada. A formulação detalhada da Equação (7) resulta na equação que descreve o movimento do robô, dada por:

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{h}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + \mathbf{C}_1\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{K}_1\mathbf{q}_1 = \mathbf{f}_1 \quad (8)$$

com: $\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ é o momento τ_1 aplicado pelo atuador ϕ_1 .

Dessa forma, a equação de movimento do robô pode ser representado pelo bloco mostrado na Fig. 3 com base na Eq. (8).

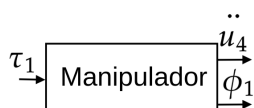


Figura 3: O diagrama de blocos do robô apresenta como entrada o momento do atuador, τ_1 , e como saídas a aceleração na ponta do elo, \ddot{u}_4 , e o ângulo de posição do atuador, ϕ_1 .

Para a implementação do controle, são definidos os sinais de entrada e de saída do sistema. Nesse contexto, considera-se como sinal de entrada o torque aplicado pelo atuador, τ_1 , enquanto os sinais de saída correspondem ao ângulo do atuador, ϕ_1 , e à aceleração no elo flexível, \ddot{u}_4 .

-

2.3 Modelo Simplificado Linear Equivalente

Partindo da equação de movimento do robô, mostrada na Equação (8), torna-se necessário derivar um modelo simplificado que possibilite o desenvolvimento da síntese do controlador. De acordo com a entrada (τ_1) e as saídas (\ddot{u}_4 e ϕ_1), consideradas no modelo e apresentadas na Figura 3, é possível estabelecer um modelo linear equivalente, tomando em conta as seguintes suposições:

1. A dinâmica do atuador será considerada desacoplada da dinâmica vibratória. Isso é possível devido à alta relação de engrenagens do servomotor redutor Dynamixel XM430-W350-T.
2. São considerados apenas os efeitos lineares, ou seja, o efeito giroscópico h é desprezível, já que a velocidade angular ($\dot{\phi}_1$) é reduzida durante a operação do robô.

Consequentemente, o modelo linear e desacoplado equivalente para o modelamento do atuador corresponde ao modelo equivalente do eixo de um atuador, conforme apresentado na Eq. (9).

A função de resposta em frequência (FRF) é apresentada na Eq. (10), esta FRF relaciona a aceleração \ddot{u}_4 com o momento na entrada τ_1 .

$$\tau_1 = J_{eqv}\ddot{\phi}_1 + v\dot{\phi}_1 \quad (9)$$

$$\frac{u_4(s)}{\tau_1(s)} = \frac{k_1}{s^2(s^2 + k_2s + k_3)} \quad (10)$$

com $J_{eqv} = I_{m1} + l^2m_{p1}$ e s sendo a variável de Laplace.

Os parâmetros da equação na Equação (8) foram identificados previamente (LARAMOLINA, 2024). Consequentemente, a Fig. 4 apresenta resposta numérica do modelo total (baseado na Eq. (8)), do modelo simplificado (baseado nas Eqs. (9) e (10)) e da bancada experimental da Fig. 1a para o ângulo do atuador (ϕ_1), e a aceleração na ponta do elo (\ddot{u}_4). Observa-se que essas três respostas são equivalentes.

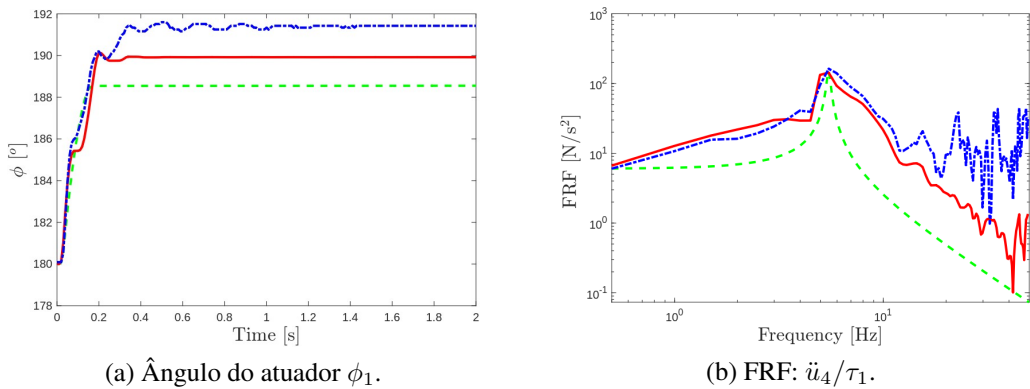


Figura 4: Resultados obtidos do modelo e da bancada experimental: (—) Modelo Completo, (---) Bancada Experimental e (-,-) Modelo Simplificado.

Finalmente, o modelo equivalente das Eqs. (9) e (10) será usado para a síntese do controle.

3 Controlador Híbrido *Fuzzy*-PID

O propósito do controle é reduzir as vibrações e diminuir a desviação no posicionamento no atuador. O controlador a ser implementado contemplará duas funções principais: *i*) a mitigação das vibrações e *ii*) a regulação da posição. Nesta seção, é apresentado um controlador híbrido *fuzzy*-PID, desenvolvido para aprimorar a saída do controlador PID tradicional.

3.1 Controle combinado de posição e vibração

O diagrama da síntese de controle está ilustrado na Fig. 5. Este esquema contempla tanto o controlador de vibração, C_v , quanto o controlador de posição, C_p , permitindo a atuação conjunta para o controle simultâneo das vibrações e da posição. Primeiramente, o robô é descrito com a entrada τ_1 e as saídas \ddot{u}_4 e ϕ_1 , conforme ilustrado no diagrama da Fig. 3. As respostas desse modelo correspondem aos sinais captados pelo acelerômetro (\ddot{u}_4) e ao ângulo do atuador (ϕ_1) obtido pelo encoder, conforme detalhado na implementação da seção 2.1. Para a síntese do controle, são adotadas as suposições do modelo linear e desacoplado do robô, conforme exposto na seção 2.3. Dessa forma, a regra de controle é definida pela combinação dos controles de vibração e de posição, expressa por $\tau_1 = \tau_v + \tau_p$, onde τ_v corresponde ao controle de vibração e τ_p ao controle de posição. Conforme ilustrado na Fig. 5, a estrutura de controle é implementado no robô.

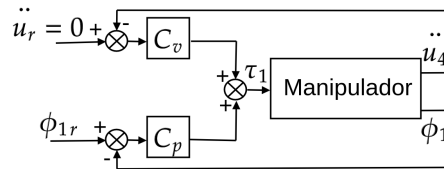


Figura 5: Estrutura de controle para gerenciamento simultâneo da posição e da vibração.

O bloco C_v representa o controlador responsável por reduzir as vibrações do elo flexível. Seu objetivo principal é eliminar a aceleração na ponta do elo, reduzindo assim a amplitude das oscilações. Por isso, a referência de aceleração é estabelecida como zero ($\ddot{u}_r = 0$). O desvio de aceleração é calculado como $e_v = 0 - \ddot{u}_4$, e a regra de controle de vibração é dada por: $\tau_v(t) = C_v e_v$.

O controle de posição visa eliminar o desvio de posição definido como $e_p = \phi_{1r} - \phi_1$. Dessa forma, o controlador garante que o desvio de posição seja anulado em regime permanente, onde $\phi_{1r}(t)$ representa a referência desejada de posição. Portanto:

$$\lim_{t \rightarrow 0} e_p(t) = 0 \quad (11)$$

A regra de controle para a posição é dada por $\tau_p = C_p e_p(t)$, em que C_p representa a ação aplicada pelo controlador.

A elaboração dos controladores de posição (C_p) e de vibração (C_v) pode ser realizada utilizando diferentes métodos encontrados na literatura. Neste trabalho, o controle de vibração será implementado por meio de um controlador híbrido do tipo *fuzzy*-PID, enquanto o controle

de posição será realizado com um controlador PID clássico.

Conforme a metodologia adotada, o controle da posição no atuador do robô, representada pelo ângulo ϕ , será realizado por um controlador PID, cuja regra de controle é descrita pela seguinte expressão:

$$\tau_p(t) = k_p e_p(t) + k_i \int_0^t e(\mathcal{T}) d\mathcal{T} + k_d \frac{de_p(t)}{dt} \quad (12)$$

onde $\tau_p(t)$ representa o sinal de controle de posição, e k_p , k_i e k_d são os ganhos proporcional, integral e derivativo, respectivamente. O termo $e_p(t)$ corresponde ao desvio de posição do ângulo do atuador, t indica o tempo, e \mathcal{T} é o intervalo de integração.

3.2 Estrutura do Controlador *Fuzzy*

O controle de vibração da aceleração da ponta do elo flexível é baseado em lógica *fuzzy*. Para a síntese do controle é considerado o modelo simplificado das Eqs. (9) e (10).

A síntese de um controlador baseado em lógica *fuzzy* envolve a definição de um conjunto de regras, utilizando funções de pertinência e operadores lógicos como base do sistema de inferência. Por meio de um mecanismo de inferência, o controlador *fuzzy* associa as variáveis de entrada às variáveis de saída, conforme descrito em (LILLY, 2011). De modo geral, a síntese de sistemas de controle baseados em lógica *fuzzy* segue os seguintes passos:

- i) Determinar o intervalo de valores possíveis para as variáveis de entrada e saída;
- ii) Estabelecer um conjunto de funções, chamadas funções de pertinência, que associam as variáveis de entrada e saída aos seus respectivos universos de discurso;
- iii) Definir um conjunto de regras que relacionam as variáveis de entrada com as de saída, utilizando operadores lógicos;
- iv) Após a formulação das regras, realiza-se a tradução matemática da linguagem simbólica empregada, por meio de operadores lógicos fundamentados na teoria dos conjuntos *fuzzy*. Essa etapa é composta por três fases:
 - Fuzzificação: converte os valores reais das variáveis de entrada em graus de pertinência dentro de conjuntos *fuzzy*;
 - Inferência difusa: aplica as regras ao resultado da fuzzificação para gerar um conjunto de variáveis *fuzzy* por meio de um mecanismo de inferência;
 - Defuzzificação: converte o resultado da inferência em uma saída numérica concreta.

4 Simulações e Resultados

Nesta seção, os resultados numéricos obtidos pelo controlador PID convencional e pelo controlador *fuzzy* proposto são apresentados. Adicionalmente, os experimentos de robustez realizados com o controlador proposto são descritos.

4.1 Ajuste dos parâmetros do controlador PID

A sintonia do controlador PID abordada em duas partes. A primeira refere-se ao controle proporcional ($C_v(s) = k_v$) aplicado ao controlador de vibração do elo flexível, e a segunda, ao controlador de posição, que utiliza um controlador proporcional-derivativo ($C_v(s) = Kp + Kds$), sendo s a variável de Laplace.

A síntese do controlador de vibração consiste em definir o ganho proporcional do controlador C_v . O ganho proporcional foi definido para minimizar o pico da FRF da Fig. 4b em 12dB. A escolha do ganho proporcional para atenuar o pico da FRF em 12 dB foi motivada pela necessidade de estabilizar o sistema, reduzindo a ressonância que poderia levar a oscilações indesejadas, e por um compromisso entre desempenho e controle, assegurando que a atenuação fosse suficiente para diminuir a ressonância sem comprometer o desempenho do sistema. Isso implica uma redução de $10m/s^2$ na amplitude de aceleração na ponta do elo, diminuindo assim as vibrações. Consequentemente, o ganho proporcional foi definido como $k_v = 0.01$.

Para esta aplicação em particular, considera-se um controlador proporcional-derivativo. Os ganhos do controlador são determinados de forma a obter a seguinte equação característica de malha fechada no modelo simplificado do atuador, conforme a Eq. (9), onde s é a variável de Laplace:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \quad (13)$$

Assim, considera-se $\xi = 1$ para garantir uma resposta sem *overshoot*, e $\omega_n = 50 \text{ rad/s}$, obtido experimentalmente a partir da identificação dos parâmetros do robô, resultando nos ganhos de $k_p = 1,275$ e $k_d = 0,24$.

4.2 Implementação do Controlador *Fuzzy*

O controle híbrido *fuzzy*-PID pode ser visto na Fig. 6, que apresenta a estrutura de implementação do controlador híbrido *fuzzy*-PID no *Matlab/Simulink*.

O controlador *fuzzy* foi implementado a partir de uma estratégia de controle elaborada por meio da observação e análise do comportamento dinâmico, diante de perturbações provenientes do torque do servomotor, em função de uma referência de posição desejada do sistema.

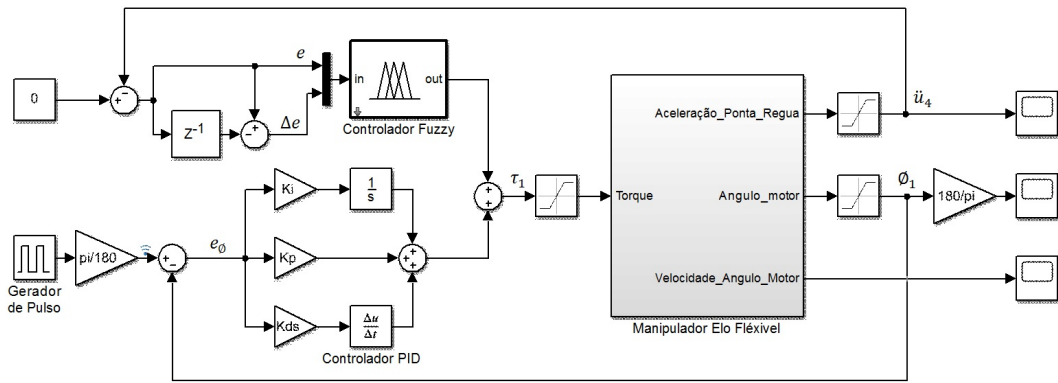


Figura 6: Estrutura de controle híbrido fuzzy-PID.

Considerando os efeitos causados pelo servomotor na ponta do elo, é possível descrever verbalmente as estratégias de controle que traduzem a operação de controle do sistema físico mediante a aplicação de uma referência desejada.

No instante em que se aplica um torque de referência no servomotor, o movimento de flexão na ponta da régua é contrário ao movimento gerado pelo curso do servomotor. Nesse sentido, podem ser formuladas, de maneira simplificada, duas regras de controle expressas verbalmente: “Se a aceleração na ponta da régua é positiva, o momento gerado pelo servomotor é negativo” e “Se a aceleração na ponta do elo é negativa, o momento gerado pelo servomotor é positivo”.

O momento gerado pelo servomotor é para anular os efeitos da força de perturbação na ponta do elo, visando seguir uma dada referência com o mínimo de amplitude de vibração \ddot{u}_4 .

O controlador *fuzzy* utilizado neste trabalho, é do tipo Sugeno de ordem zero com duas variáveis de entrada e uma saída. As variáveis de entrada do controlador são:

- o erro entre uma referência $\ddot{u}_r(t)$ e a aceleração lida pelo sensor $\ddot{u}_4(t)$, conforme Equação (14):

$$e(t) = \ddot{u}_r(t) - \ddot{u}_4(t) \quad (14)$$

- e, a variação temporal do erro $\Delta e(t)$, conforme Equação (15):

$$\Delta e(t) = \frac{e(t) - e(t-1)}{\Delta t} \quad (15)$$

onde: t e Δt referem-se ao instante e ao tempo de amostragem utilizados, respectivamente. A variável de saída do controlador *fuzzy* é dada, por sua vez, pelo torque de saída do controlador *fuzzy*, que é somado ao sinal de controle de referência PID e aplicado ao servomotor.

As entradas e saídas do controlador *fuzzy* foram implementadas com as seguintes características:

- a) Foram adotadas três funções de pertinência triangulares — N (negativo), Z (zero) e P (positivo) — distribuídas uniformemente ao longo do universo de discurso, conforme ilustrado na Figura 7;

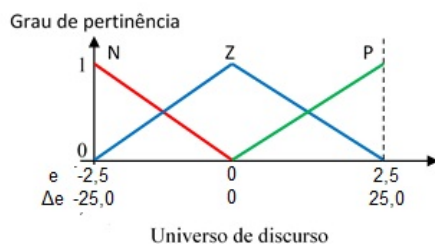


Figura 7: Funções de pertinência do controlador *fuzzy*.

- b) saída do controlador Sugeno de ordem zero, em que as variáveis linguísticas são representadas por valores constantes (N = -1,7, Z = 0 e P = 1,7), e
- c) uma base de cinco regras, conforme apresentado na Tabela 1, foi estabelecida utilizando um mecanismo de inferência do tipo max-prod.

Tabela 1: Base de regras do controlador *fuzzy*

		Δ erro		
		N	Z	P
erro	N	P^1		
	Z	P	Z	N
	P			N

Cada célula da Tabela 1 representa uma regra construída da seguinte forma:

- R^1 : Se o erro é N e Δ erro é N, então a saída do controlador é P^1 .

4.3 Resultados Numéricos

Nesta seção, é apresentada uma análise detalhada da resposta numérica do controlador PID em comparação ao controlador híbrido *fuzzy*-PID. A análise fundamenta-se no estudo numérico da equação de movimento, conforme descrito na seção 2.2 e na síntese do controlador híbrido *fuzzy*-PID, detalhado na seção 3.

Na Fig. 8, observa-se o desempenho do ângulo do atuador (ϕ_1) e da aceleração na ponta do elo (\ddot{u}_4). A curva vermelha representa a resposta ao controlador PID, enquanto a curva preta ilustra a saída do controle híbrido *fuzzy*-PID. É perceptível que ambos os controladores apresentam comportamento semelhante no controle do ângulo do elo. Isso ocorre porque ambos os sistemas de controle utilizam a mesma lógica de controle PID para controlar o ângulo do atuador.

No entanto, ao observar a saída da aceleração da ponta do elo com controle, constata-se que o controlador híbrido Fuzzy-PID reduz o sobressinal em aproximadamente 17% e o tempo de acomodação em aproximadamente 61% em comparação com o PID convencional, demonstrando uma melhoria significativa no desempenho.

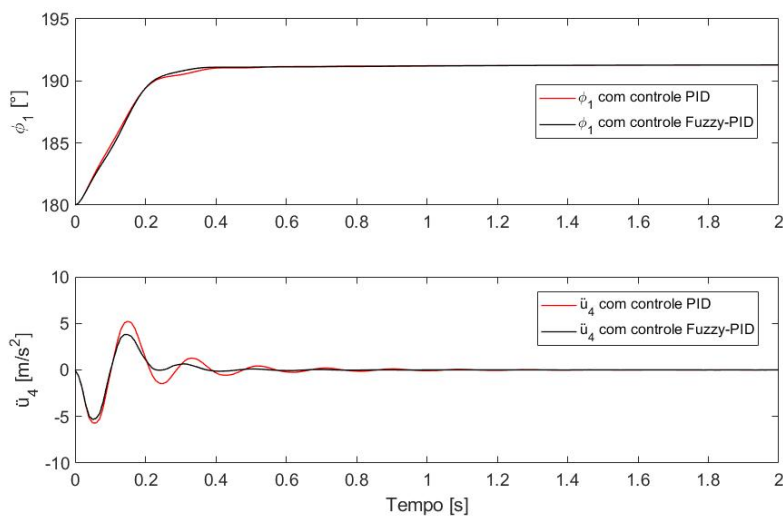


Figura 8: Posição angular ϕ_1 e aceleração da ponta do elo \ddot{u}_4 .

Este resultado demonstra que a contribuição do sinal de controle do controlador *fuzzy*-PID é significativa no desempenho do controle da ponta do elo.

Para avaliar a robustez do controle híbrido, foi realizado um conjunto de testes. Criou-se uma função de referência variável, conforme ilustrado na Figura 9, que varia o ângulo da posição inicial, inicialmente em 180 graus, para diferentes posições. A função de referência segue o ângulo de 192 graus, segundo a Fig. 8. Posteriormente, são realizadas variações em quatro posições diferentes: 165 graus, 195 graus, 175 graus e 180 graus (posição inicial).

Na Fig. 10, observa-se a aceleração \ddot{u}_4 para a posição angular ϕ_1 da Figura 9. Os resultados mostram a eficiência do controlador híbrido em comparação ao PID convencional. Em todos os casos, é evidente que o controlador *fuzzy*-PID apresenta um desempenho superior na amplitude e no tempo de acomodação da saída.

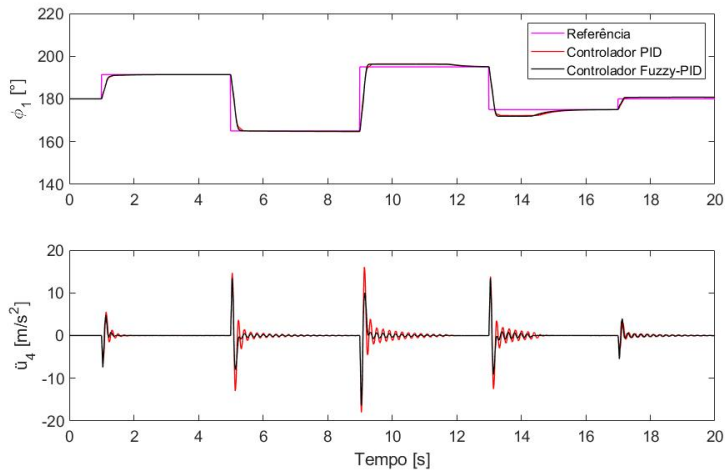


Figura 9: Variação da posição angular ϕ_1 e respectiva aceleração da ponta do elo \ddot{u}_4 .

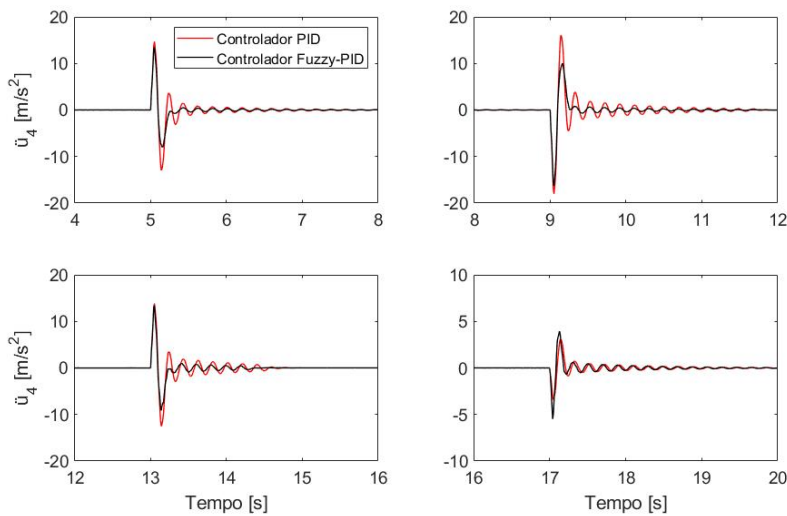


Figura 10: Ampliação da aceleração da ponta do elo \ddot{u}_4 com os controladores PID e fuzzy-PID.

A Figura 11 ilustra o desempenho do valor de torque aplicado ao servomotor ao longo do tempo, conforme a experiência descrita anteriormente. Como pode ser verificado, o torque é proporcional ao desempenho do sistema com controle, demonstrando eficiência ao atender ao desempenho geral do controlador. Como resultado, observou-se uma redução no sobressinal e no tempo de acomodação, além de um desempenho temporal estável e suave, o que evidencia a eficácia do controlador proposto.

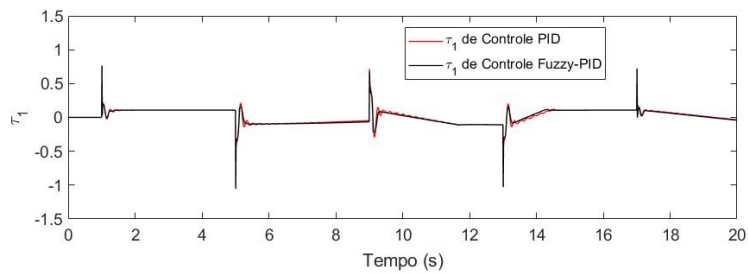


Figura 11: Torque τ_1 aplicado ao servomotor ao longo do tempo.

5 Conclusões

Neste trabalho, foi realizada a modelagem dinâmica de um manipulador com elo flexível, utilizando a técnica dos elementos finitos em conjunto com a formulação de Lagrange para obtenção da equação de movimento. Desenvolveu-se um controlador híbrido *fuzzy*-PID para atuar no sistema. A partir da equação de movimento obtida, conduziu-se uma análise numérica por meio de simulações no ambiente Matlab/Simulink®, com o objetivo de avaliar o desempenho do controlador aplicado ao manipulador flexível. A simulação permitiu investigar a resposta dinâmica do sistema, considerando tanto o comportamento do atuador quanto as vibrações na extremidade do elo. Adicionalmente, as respostas do sistema sob a ação do controle foram comparadas para análise de desempenho.

A seguir, enumeram-se as principais conclusões deste trabalho:

1. A evolução dinâmica das simulações numéricas da equação de movimento apresenta um comportamento equivalente ao desempenho experimental do atuador. Um modelo simplificado linear e desacoplado equivalente foi obtido para representar a dinâmica da junta e a dinâmica vibratória do elo flexível. Essas simplificações no modelo contribuíram para a síntese do controle.
2. O controle híbrido *fuzzy*-PID se apresenta como uma alternativa que aprimora o desempenho dinâmico do robô, uma vez que o controle fuzzy se destaca em sistemas não lineares e complexos, nos quais as relações entre as variáveis são imprecisas. Adicionalmente, o controle fuzzy demonstra maior robustez às incertezas e ruídos, garantindo um desempenho estável em condições variáveis.
3. O controlador híbrido *fuzzy*-PID apresenta um comportamento superior ao controle PID, especialmente na atenuação das vibrações do elo flexível, mantendo um desempenho equivalente no desvio do ângulo do atuador.

Os resultados provenientes da simulação indicam que o controlador híbrido *fuzzy*-PID apresentou desempenho superior ao controlador PID convencional. Como desdobramento deste estudo, propõe-se, em trabalhos futuros, a implementação prática do controlador desenvolvido no manipulador com elo flexível.

6 *

Referências

- BRIOT, S.; KHALIL, W. *Dynamics of parallel robots: From rigid bodies to flexible elements*. [S.l.]: Springer, 2015. v. 35. 2
- COSTA, T. L. et al. Robust h_{∞} computed torque control for manipulators. *IEEE Latin America Transactions*, IEEE, v. 16, n. 2, p. 398–407, 2018. 2
- FRASER, A. R.; DANIEL, R. W. *Perturbation techniques for flexible manipulators*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 138. 2
- GOLD, T.; VÖLZ, A.; GRAICHEN, K. Model predictive interaction control for robotic manipulation tasks. *IEEE Transactions on Robotics*, IEEE, v. 39, n. 1, p. 76–89, 2022. 3
- GREEN, A.; SASIADEK, J. Robot manipulator control for rigid and assumed mode flexible dynamics models. In: *AIAA guidance, navigation, and control conference and exhibit*. [S.l.: s.n.], 2003. p. 5435. 2
- HE, X. et al. Vibration control for a flexible single-link manipulator and its application. *IET Control Theory & Applications*, Wiley Online Library, v. 14, n. 7, p. 930–938, 2020. 3
- HUANG, J.; JI, J. Vibration control of coupled duffing oscillators in flexible single-link manipulators. *Journal of Vibration and control*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 27, n. 17-18, p. 2058–2068, 2021. 3
- INMAN, D. J. *Vibration with control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2017. 5
- LARA-MOLINA, F.; TAKANO, K.; KOROISHI, E. Set-point regulation of a robot manipulator with flexible joints using fuzzy control. In: *IEEE. 2015 12th Latin American Robotics Symposium and 2015 3rd Brazilian Symposium on Robotics (LARS-SBR)*. [S.l.], 2015. p. 103–108. 2
- LARA-MOLINA, F. A. Modeling of flexible-link manipulators under uncertain parameters based on stochastic finite element method. *Journal of Mechanisms and Robotics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 14, n. 6, p. 061002, 2022. 2
- LARA-MOLINA, F. A. Parameter identification of flexible link manipulators using evolutionary algorithms. *Machines*, MDPI, v. 12, n. 6, p. 409, 2024. 8
- LARA-MOLINA, F. A. et al. Generalized predictive control of parallel robots. In: *Robot Motion and Control 2011*. [S.l.]: Springer, 2012. p. 159–169. 2

- LARA-MOLINA, F. A. et al. Robust generalized predictive control of the orthoglide robot. *Industrial Robot: An International Journal*, Emerald Group Publishing Limited, v. 41, n. 3, p. 275–285, 2014. 2
- LI, B. et al. Advances in flexible robotic manipulator systems—part i: Overview and dynamics modeling methods. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, IEEE, 2024. 3
- LILLY, J. H. *Fuzzy control and identification*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. 10
- MOLINA, F. A. L. *Simulação e implementação experimental de um controlador preditivo generalizado para um robô orthoglide baseado na modelagem dinâmica*. Tese (Doutorado) — [sn], 2012. 2
- SUN, W.; XIE, S.; SU, S.-F. Learning-based adaptive optimal tracking control for flexible-joint robots with quantized states: Theory and experiment. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, IEEE, 2025. 3
- USORO, P. B.; NADIRA, R.; MAHIL, S. S. A Finite Element/Lagrange Approach to Modeling Lightweight Flexible Manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 108, n. 3, p. 198–205, 09 1986. ISSN 0022-0434. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.3143768>. 3
- ZHU, Q. et al. A novel combined control of flexible single-link manipulator based on singularly perturbed theory. *Robotic Intelligence and Automation*, Emerald Publishing Limited, v. 44, n. 6, p. 806–816, 2024. 2