


OS MÉTODOS TALBOT-FIXO E STEHFEST APLICADOS À APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES

THE TALBOT-FIXED AND STEHFEST METHODS APPLIED TO FUNCTION APPROXIMATION

Marcela Silveira da Silveira¹ 

Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez² 

João Francisco Prolo Filho³ 

Resumo: Este trabalho visa avaliar a eficiência de dois algoritmos numéricos para a inversão da Transformada de Laplace (TL): Talbot-Fixo e Stehfest. Para o método Talbot-Fixo são empregadas duas regras para a aproximação da integral de Bromwich, resultante da deformação e truncamento do contorno: trapézio e ponto médio. As técnicas são testadas para dois conjuntos de funções. No primeiro grupo estão as funções ditas elementares, cujas transformadas inversas envolvem polinômios, funções exponenciais e trigonométricas. Já o segundo, compreende funções com características especiais, cuja Transformada de Laplace inversa envolve a Função de Bessel, a Função Erro Complementar ou, ainda, a Função de Heaviside. Os perfis de solução obtidos por meio da inversão numérica foram comparados com os gerados analiticamente, a fim de verificar a precisão e a eficácia dos métodos utilizados. Para a avaliação da performance dos algoritmos foi empregada a métrica do Erro Absoluto Médio, com o objetivo de estimar o número de termos necessários no somatório, chamado N ótimo (N_o), a fim de obter-se os resultados que melhor ajustam o perfil numérico ao analítico de solução. Para os grupos de funções estudados neste artigo, de um modo geral, ao considerar-se a menor ordem do Erro Absoluto Médio, o método Talbot-Fixo revelou-se o melhor para a obtenção de resultados confiáveis no processo de inversão numérica.

Palavras-chave: Transformada de Laplace. Inversão numérica. Talbot-Fixo. Stehfest.

Abstract: This work aims to evaluate the efficiency of two numerical algorithms for Laplace Transform (LT) inversion: Fixed-Talbot and Stehfest. The Fixed-Talbot method employs two rules to approximate the Bromwich integral, resulting from contour deformation and truncation:

¹ Licenciado em Matemática, PPGMC/FURG, silveiramarcela519@gmail.com.

² Doutora em Engenharia Mecânica, PPGMC/FURG, barbararodriguez@furg.br.

³ Doutor em Matemática Aplicada, PPGEIO/FURG, joaoprolo@furg.br.

trapezoidal and midpoint. The techniques are tested for two sets of functions. The first group comprises so-called elementary functions, whose inverse transforms involve polynomials, exponential functions, and trigonometric functions. The second group comprises functions with special characteristics, whose inverse Laplace Transform involves the Bessel function, the complementary error function, or even the Heaviside function. The solution profiles obtained through numerical inversion were compared with those generated analytically to verify the accuracy and effectiveness of the methods used. To evaluate the algorithms' performance, the Mean Absolute Error metric was used to estimate the number of terms required in the summation, called the optimal N (N_o), to obtain results that best fit the numerical profile to the analytical solution. For the groups of functions studied in this article, in general, when considering the lowest order of the Mean Absolute Error, the Talbot-Fixed method proved to be the best for obtaining reliable results in the numerical inversion process.

Keywords: Laplace transform. Numerical inversion. Talbot-Fixo. Stehfest.

1 INTRODUÇÃO

A Transformada de Laplace é uma importante ferramenta matemática devido a sua capacidade de converter equações diferenciais, sejam elas parciais (EDP's) ou ordinárias (EDO's), em equações mais simples de se resolver. Parte desse sucesso está relacionado às suas propriedades, tais como, a linearidade, o tratamento das derivadas e a incorporação das condições iniciais, fazendo com que esse método seja amplamente aplicado na resolução de problemas em diversas áreas da Engenharia e das Ciências Aplicadas (FREITAS, 2022; PAZ *et al.*, 2023; da SILVEIRA *et al.*, 2024). Resolver equações diferenciais que modelam, por exemplo, fenômenos físicos de difusão, de condução de calor ou de transporte de soluto, utilizando a Transformada de Laplace, por vezes, nos leva a lidar com soluções, cujas expressões envolvem funções exponenciais e trigonométricas, a Função de Bessel, a Função Erro Complementar ou a Função de Heaviside (KREYSZIG, 2011). Nestes casos, combinar a Transformada de Laplace com métodos numéricos de inversão é imprescindível, principalmente pela dificuldade em se obter transformadas inversas de forma analítica.

Nesse sentido, diante do desafio de melhorar a eficácia em lidar com expressões cada vez mais complexas, surge a necessidade de explorar o desempenho numérico de diferentes técnicas de inversão como, por exemplo, aquelas que utilizam a deformação do contorno de integração de Bromwich (TALBOT, 1979; ABATE e VALKÓ, 2004; FREITAS, 2022; PAZ *et al.*, 2023) ou a fórmula de Post-Widder (STEHFEST, 1970; COHEN, 2007). A primeira abordagem requer o emprego de métodos numéricos de integração a fim de aproximar a integral de Bromwich, resultante da deformação e truncamento do contorno. Para isso, sugere-se como possibilidades de tratamento as regras do trapézio (ABATE e VALKÓ, 2004) e do ponto médio (Lin, 2003). Já na segunda, o processo de inversão é realizado a partir da fórmula de Post-Widder.

Dentro deste contexto, este artigo apresenta a avaliação dos aspectos computacionais dos métodos Talbot-Fixo e Stehfest para a inversão numérica da Transformada de Laplace, quando aplicados a dois conjuntos de funções. No primeiro conjunto estão as funções ditas elementares, cujas transformadas inversas envolvem polinômios, funções exponenciais e trigonométricas. Já o

segundo, compreende funções com características especiais, cuja transformada inversa, $f(t)$, é expressa em termos da Função de Bessel, da Função Erro Complementar ou da Função de Heaviside. Para o algoritmo Talbot-Fixo são consideradas, ainda, as regras do trapézio (que é a habitual) e do ponto médio para a aproximação da integral de Bromwich, resultante da deformação e truncamento do contorno.

Para atingir os objetivos propostos, este trabalho está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 descreve-se a fundamentação teórica dos Métodos Talbot-Fixo, incluindo a aplicação das duas regras numéricas de integração, e Stehfest. Na Seção 3, apresentam-se os resultados obtidos. E, por fim, na Seção 4, faz-se as devidas considerações acerca dos dados que se obteve neste estudo.

2 MÉTODOS NUMÉRICOS DE INVERSÃO

Nesta seção apresenta-se a formulação matemática dos métodos de inversão numérica da Transformada de Laplace abordados neste trabalho.

2.1 Talbot-Fixo

Segundo Cohen (2011), o método proposto por Talbot (1979) tem como princípio fundamental a avaliação da integral complexa de inversão e a deformação do contorno de Bromwich. Portanto, avalia-se a integral dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\beta} F(s)e^{st} dt, \quad (1)$$

onde o contorno β é uma linha vertical definida por $s = c + i\omega$, com $\omega \in (-\infty, +\infty)$, c tem um valor fixo escolhido de tal maneira que todas as singularidades da transformação estejam à esquerda da reta $s = c$ paralela ao eixo imaginário.

Segundo Freitas (2022), a convergência da integral dada em (1) poderia ser maior se fosse atribuído aos valores de s uma componente real

suficientemente grande. De acordo com Abate e Valkó (2004), o método de Talbot considera a possibilidade de deformar o contorno β em algum caminho aberto em torno do eixo real negativo, contanto que nenhuma singularidade de $F(s)$ seja atravessada pela deformação de β . A intenção de tal mudança é, portanto, diminuir a magnitude do fator exponencial e^{st} na função integrando, Eq. (1). De um modo geral, a linha do contorno β em $(c - i\infty, c + i\infty)$ é substituída por um equivalente, β' , que inicia e termina no semiplano esquerdo do plano complexo, de modo que $\Re(s) \rightarrow -\infty$ (FREITAS, 2022). Tal substituição será viável se a transformada $F(s)$ satisfizer as seguintes condições, conforme indicado por Murli e Rizzardi (1990):

- (i) todas as singularidades s_i devem ser conhecidas, tais que $|\text{Im}(s_i)| < \gamma$, onde γ é um número conhecido;
- (ii) $|F(s)|$ tende a zero uniformemente, quando $|s|$ tende para infinito em $\Re(s) < \gamma$.

No entanto, a dificuldade encontra-se na validação da condição (i) para uma função $F(s)$ ao longo de um novo contorno β' . Contudo, segundo Cohen (2007), essa dificuldade pode ser contornada ao se utilizar a função modificada $F(\lambda s + \sigma)$. Isso é possível mediante uma escolha apropriada dos parâmetros λ e do deslocamento σ , de modo que se $F(s)$ apresenta uma singularidade s_0 , a função $F(\lambda s + \sigma)$ terá uma singularidade correspondente s_0^* tal que

$$s_0^* = \frac{s_0 - \sigma}{\lambda}. \quad (2)$$

Dessa forma, a Eq. (1) pode, então, ser substituída por

$$f(t) = \frac{\lambda e^{\sigma t}}{2\pi i} \int_{\beta'} F(\lambda s + \sigma) e^{\lambda s t} dt, t > 0. \quad (3)$$

Segundo Cohen (2007), a condição (ii) é válida para a maioria das funções para as quais é viável determinar a transformada inversa, fora àquelas que apresentam infinitas singularidades no eixo imaginário. A fim de que as singularidades de $F(s)$ não sejam cruzadas pela deformação do contorno de

Bromwich, para mapear as singularidades s_i , é estabelecido no método de Talbot uma função de varredura da região do novo contorno, definindo,

$$s(z) = \frac{z}{1-e^{-z}} + z \frac{v-1}{2}, \quad (4)$$

onde v é um parâmetro arbitrário e $z \in (-2\pi i, 2\pi i)$.

Abate e Valkó (2004) embasaram-se nessa premissa para definir uma parametrização do contorno de Talbot. Assim, reescreve-se a Eq. (4) como:

$$s(\theta) = r\theta[\cot(\theta) + i], \quad -\pi < \theta < \pi, \quad (5)$$

onde r é um parâmetro fixo apropriado. Substituindo a Eq. (5) na Eq. (1), a integral complexa de inversão pode ser escrita, em termos de θ , como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} F(s(\theta))s'(\theta)e^{ts(\theta)}d\theta. \quad (6)$$

O termo $s'(\theta)$ expressa a derivada da Eq. (5), em relação à θ , e é dado por (ABATE e VALKÓ, 2004),

$$s'(\theta) = ir[1 + i\sigma(\theta)], \quad (7)$$

onde

$$\sigma(\theta) = \theta + [\theta \cot(\theta) - 1]\cot(\theta). \quad (8)$$

Neste trabalho, propõe-se a aproximação da integral na Eq. (6) por dois métodos: a regra do trapézio e a regra do ponto médio.

2.1.1 Regra do Trapézio

A regra do trapézio é uma técnica de integração numérica na qual a área da região sob uma curva, descrita pela integral definida, é aproximada pela área de um trapézio (ou pela área de um conjunto de trapézios quando trata-se da regra composta). Segundo Abate e Valkó (2004), a versão composta da regra do trapézio na integral da Eq. (6), para um passo de tamanho $\frac{\pi}{N}$ e pontos de

avaliação $\theta_k = \frac{k\pi}{N}$, resulta na formulação geral para obtenção da aproximação da transformação inversa escrita como

$$f_T(t, N) \approx \frac{r}{N} \left\{ \frac{1}{2} F(r) e^{rt} + \sum_{k=1}^{N-1} \Re[e^{ts(\theta_k)} F(s(\theta_k)) (1 + i\sigma(\theta_k))] \right\}. \quad (9)$$

2.1.2 Regra do Ponto Médio

A regra do ponto médio, conforme detalhada por Lin (2003), também é uma técnica de integração numérica onde, dado um conjunto de subintervalos, a integral é aproximada pela soma dos valores resultantes da avaliação da função no ponto médio de cada subintervalo multiplicados pelo tamanho desses subintervalos. De forma equivalente, quando aplicada na Eq. (6) para a aproximação da integral, com o espaçamento definido por $\theta_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{N}$, a expressão resultante é dada por

$$f_{PM}(t, N) \approx \frac{r}{2N} \Re \left\{ \sum_{k=-N}^{N-1} e^{ts(\theta_k)} F(s(\theta_k)) [1 + i\sigma(\theta_k)] \right\}. \quad (10)$$

2.2 Stehfest

O algoritmo de Gaver-Stehfest é um método numérico que permite inverter a Transformada de Laplace. Esta técnica tem sido estudada e utilizada em diversos trabalhos da literatura (JUNQUEIRA, 1990; KRISTOPHER, 2013; e FREITAS, 2022).

Davies e Martin (1979) consideram “métodos que calculam uma amostra” apresentando a fórmula

$$I_n(t) = \int_0^{\infty} \delta_n(t, u) f(u) du, \quad (11)$$

onde as funções $\delta_n(t, u)$ formam uma sequência convergente, de modo que $I_n(t)$ tende a $f(t)$ a medida que n aumenta. A fórmula de Post-Widder (GAVER, 1966) para inversão pode ser pensada como sendo obtida a partir das funções

$$\delta_n(t, u) = \frac{\left(\frac{nu}{t}\right)^n e^{-\frac{nu}{t}}}{(n-1)!}. \quad (12)$$

Gaver (1966) sugeriu o uso de

$$\delta_n(t, u) = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} a(1 - e^{-au})^n e^{-nau}, \quad (13)$$

onde $a = \frac{\ln(2)}{t}$.

A convergência de $I_n(t)$ para $f(t)$ é lenta. Contudo, pode-se acelerar a convergência pela aplicação de técnicas de extrapolação para f . Uma fórmula de extrapolação muito útil é o algoritmo desenvolvido por Stehfest (1970) dado pela fórmula,

$$f(t) \approx a \sum_{n=1}^N K_n F(na), \quad (14)$$

em que F é a função transformada e

$$K_n = (-1)^{n+\frac{N}{2}} \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{\min(n, \frac{N}{2})} \frac{k^{\frac{N}{2}} (2k)!}{(\frac{N}{2}-k)! k! (k-1)! (n-k)! (2k-n)!}, \quad (15)$$

onde N é par. Note que os coeficientes K_n dependem apenas de N , que é o número de termos usados no somatório. A transformada inversa numérica torna-se mais precisa com um aumento do valor de N . No entanto, erros de arredondamento limitam o valor de N que pode ser usado (MOENCH e OGATA, 1981).

3 RESULTADOS

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos com a aplicação do Método Talbot-Fixo, associado às regras do trapézio e do ponto médio para a aproximação da integral descrita na Eq. (6), e do Método Stehfest. Os algoritmos computacionais foram implementados no software livre Octave, versão 8.4, em uma máquina com o sistema operacional Ubuntu, versão i3-7020. Para a realização dos testes e da análise dos métodos, foram testados dois conjuntos

de funções. O primeiro grupo é composto por funções elementares, cujas transformadas inversas envolvem polinômios, funções exponenciais e trigonométricas, apresentadas na Tabela 1. O segundo grupo, por sua vez, é formado por funções de natureza especial, cuja Transformada de Laplace inversa envolve a Função de Bessel, a Função Erro Complementar e a Função de Heaviside, apresentadas na Tabela 2. Toma-se a , como sendo uma constante real que exerce efeitos na amplitude, no decaimento ou no deslocamento das funções. Para fins de simulação, aqui será tomado, $a = 0,5$ (FREITAS, 2022).

Tabela 1 – Transformada de Laplace para Funções Elementares.

$F(s)$	$f(t)$
$F_1(s) = \frac{1}{s^2}$	$f_1(t) = t$
$F_2(s) = \frac{1}{s+a}$	$f_2(t) = e^{-at}$
$F_3(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$	$f_3(t) = \text{sen}(at)$
$F_4(s) = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$	$f_4(t) = t \cos(t)$
$F_5(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$	$f_5(t) = t e^{-t}$
$F_6(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$f_6(t) = \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$
$F_7(s) = e^{-\sqrt{s}}$	$f_7(t) = \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{2\sqrt{\pi t^3}}$
$F_8(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$	$f_8(t) = e^{-2t}(t-1)$
$F_9(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$	$f_9(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-0,5t} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

Fonte: Os autores (2025).

Tabela 2 – Transformada de Laplace para funções de natureza especial.

$F(s)$	$f(t)$
$F_{10}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$f_{10}(t) = J_0(at)$
$F_{11}(s) = \frac{1}{s \left(\sqrt{s^2 + a^2} \right)^3}$	$f_{11}(t) = tJ_0(at)$
$F_{12}(s) = \frac{1 - e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$f_{12}(t) = \operatorname{erf} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right)$
$F_{13}(s) = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$f_{13}(t) = \operatorname{erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right)$
$F_{14}(s) = \frac{e^{-\frac{a}{s}}}{\sqrt{s}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{a}{s}} \right)$	$f_{14}(t) = \frac{e^{-2\sqrt{at}}}{\sqrt{\pi t}}$
$F_{15}(s) = \frac{e^{-as}}{s}$	$f_{15}(t) = U(t - a)$

Fonte: Os autores (2025).

A análise da eficiência dos métodos numéricos foi realizada através da obtenção do melhor N (indicado como N_0), o qual foi determinado dentro do intervalo de $1 \leq N \leq 100$, utilizando como critério de escolha o valor do Erro Absoluto Médio. O perfil do Erro Absoluto Médio, denotado por \underline{E}_{abs} foi analisado utilizando-se uma adaptação da fórmula proposta por Calixto *et al.* (2022), que neste trabalho está definida como:

$$\underline{E}_{abs} = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} E_{abs} (f(t_i)), \quad (16)$$

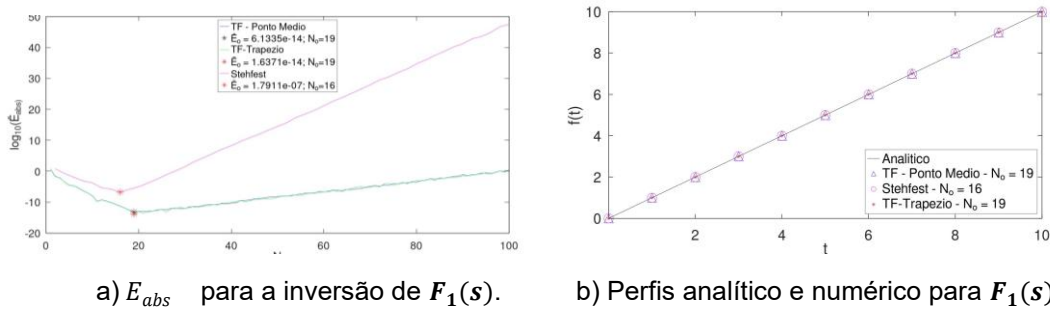
onde E_{abs} é o Erro Absoluto calculado para cada f , em cada um dos pontos t_i escolhidos no intervalo $[0, 10]$, e N_t é o número de pontos do vetor t . Com base na análise realizada, foram estimados os valores ótimos de N que melhor ajustam (usando a métrica do Erro Absoluto Médio) a aproximação numérica da solução em relação à solução analítica. Esses valores correspondem ao número de termos no somatório de cada um dos métodos considerados.

3.1 Inversão das funções $F_1(s)$ a $F_9(s)$: funções elementares

3.1.1 Inversão de $F_1(s)$

A Figura 1 mostra os testes para a inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_1(s) = \frac{1}{s^2}$. O perfil do Erro Absoluto Médio está representado na Figura 1a. A Figura 1b apresenta uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos para a inversão de $F_1(s)$.

Figura 1 – Resultados para a inversão de $F_1(s)$.



a) E_{abs} para a inversão de $F_1(s)$.

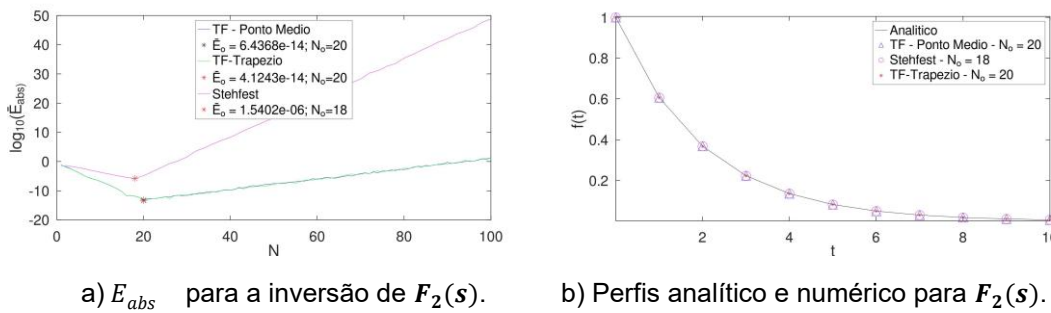
b) Perfis analítico e numérico para $F_1(s)$.

Fonte: Dos autores.

3.1.2 Inversão de $F_2(s)$

A inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_2(s) = \frac{1}{s+a}$ está representada na Figura 2. O perfil do Erro Absoluto Médio e uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos são apresentados nas Figuras 2a e 2b, respectivamente.

Figura 2 – Resultados para a inversão de $F_2(s)$.



a) E_{abs} para a inversão de $F_2(s)$.

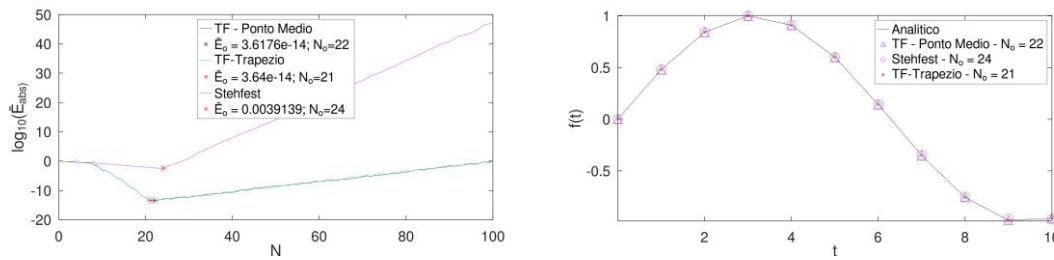
b) Perfis analítico e numérico para $F_2(s)$.

Fonte: Dos autores.

3.1.3 Inversão de $F_3(s)$

Os testes realizados (Figura 3) para a inversão numérica da Transformada de Laplace para $F_3(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ estão representados nas Figuras 3a, que apresenta o perfil do Erro Absoluto Médio e, 3b que exibe uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos.

Figura 3 – Resultados para a inversão de $F_3(s)$.



a) E_{abs} para a inversão de $F_3(s)$.

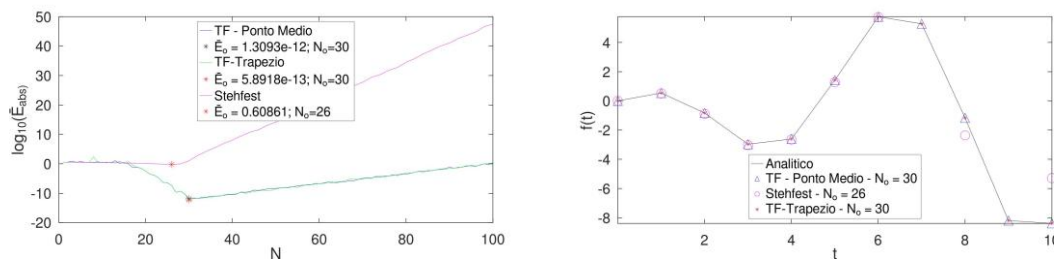
b) Perfis analítico e numérico para $F_3(s)$.

Fonte: Dos autores.

3.1.4 Inversão de $F_4(s)$

Os dados obtidos para a inversão numérica da Transformada de Laplace de $F_4(s) = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$ estão representados na Figura 4. Particularmente, a Figura 4a apresenta o perfil do Erro Absoluto Médio e a Figura 4b, uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos para $F_4(s)$.

Figura 4 – Resultados para a inversão de $F_4(s)$.



a) E_{abs} para a inversão de $F_4(s)$.

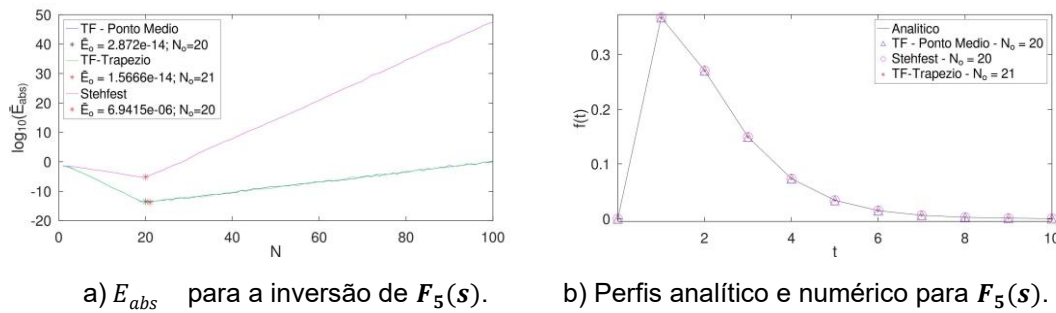
b) Perfis analítico e numérico para $F_4(s)$.

Fonte: Dos autores.

3.1.5 Inversão de $F_5(s)$

A Figura 5 mostra os testes para a inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_5(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$. O perfil do Erro Absoluto Médio está representado na Figura 5a. A Figura 5b apresenta uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos para $F_5(s)$.

Figura 5 – Resultados para a inversão de $F_5(s)$.



a) E_{abs} para a inversão de $F_5(s)$.

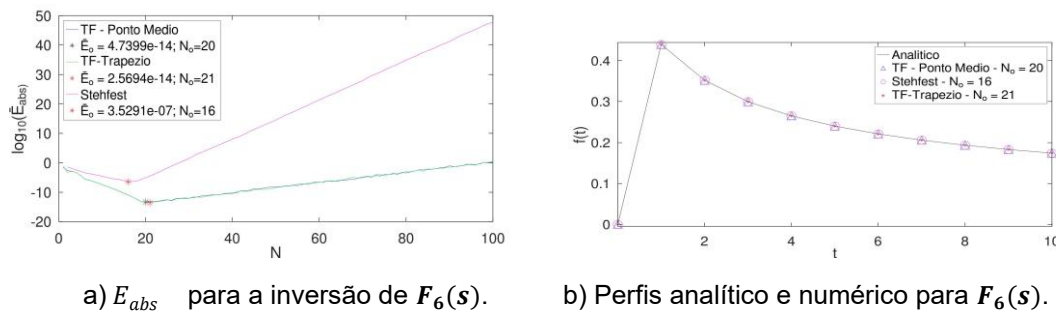
b) Perfis analítico e numérico para $F_5(s)$.

Fonte: Dos autores.

3.1.6 Inversão de $F_6(s)$

Os resultados alcançados no processo de inversão numérica da Transformada de Laplace (Figura 6) para a função $F_6(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$ estão expostos na Figura 6a, que exibe o perfil do Erro Absoluto Médio, e na Figura 6b, que traz uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos.

Figura 6 – Resultados para a inversão de $F_6(s)$.



a) E_{abs} para a inversão de $F_6(s)$.

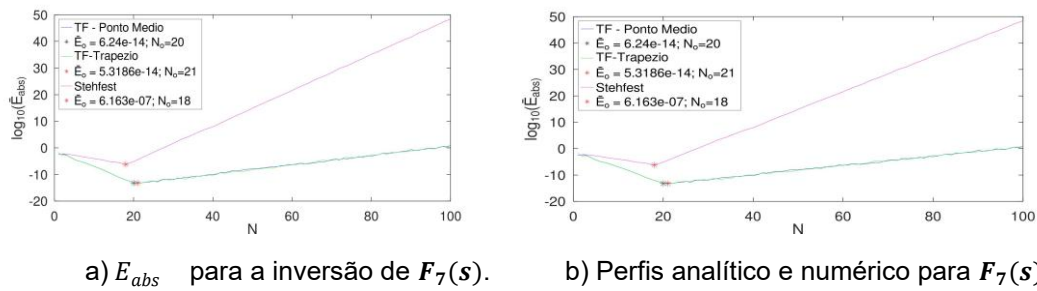
b) Perfis analítico e numérico para $F_6(s)$.

Fonte: Dos autores.

3.1.7 Inversão de $F_7(s)$

A Figura 7 mostra os testes realizados para a inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_7(s) = e^{-\sqrt{s}}$. O perfil do Erro Absoluto Médio e uma comparação gráfica dos resultados (perfis analíticos e numéricos) são apresentados nas Figuras 7a e 7b, respectivamente.

Figura 7 – Resultados para a inversão de $F_7(s)$.



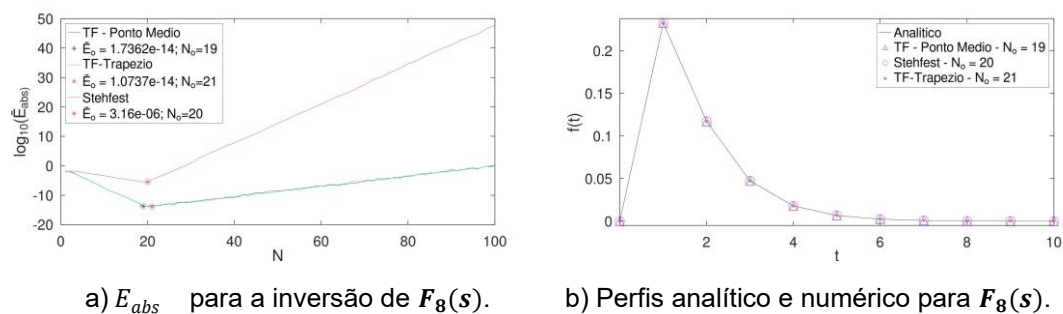
a) E_{abs} para a inversão de $F_7(s)$. b) Perfis analítico e numérico para $F_7(s)$.

Fonte: Dos autores.

3.1.8 Inversão de $F_8(s)$

Os dados obtidos, a partir da inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_8(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, são apresentados nas Figuras 8a e 8b, com a representação, respectivamente, do perfil do Erro Absoluto Médio e de uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos para a função.

Figura 8 – Resultados para a inversão de $F_8(s)$.



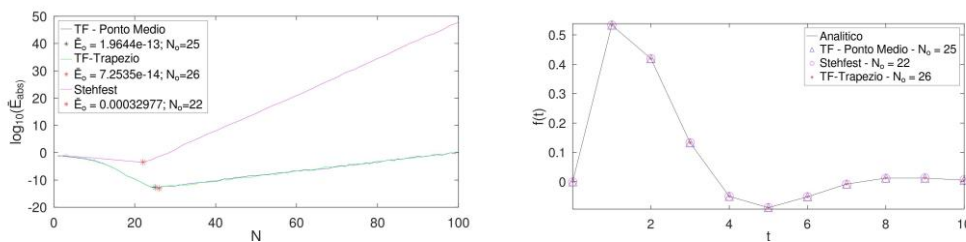
a) E_{abs} para a inversão de $F_8(s)$. b) Perfis analítico e numérico para $F_8(s)$.

Fonte: Dos autores.

3.1.9 Inversão de $F_9(s)$

Os testes para a inversão numérica da Transformada de Laplace (Figura 9) de $F_9(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$ são apresentados nas Figuras 9a, que traz o perfil do Erro Absoluto Médio e, 9b, com a comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos para a função $F_9(s)$.

Figura 9 – Resultados para a inversão de $F_9(s)$.



a) E_{abs} para a inversão de $F_9(s)$.

b) Perfis analítico e numérico para $F_9(s)$.

Fonte: Dos autores.

A Tabela 3 sintetiza os valores do parâmetro N_0 e da ordem dos Erros Absolutos Médios obtidos para as diferentes funções, $F_1(s)$ a $F_9(s)$, utilizando-se o método Talbot-Fixo, associado às regras do trapézio (Talbot-Fixo Trapézio) e do ponto médio (Talbot-Fixo Ponto Médio), e Stehfest.

3.2 Inversão das funções $F_{10}(s)$ a $F_{15}(s)$: funções com características especiais

3.2.1 Inversão de $F_{10}(s)$

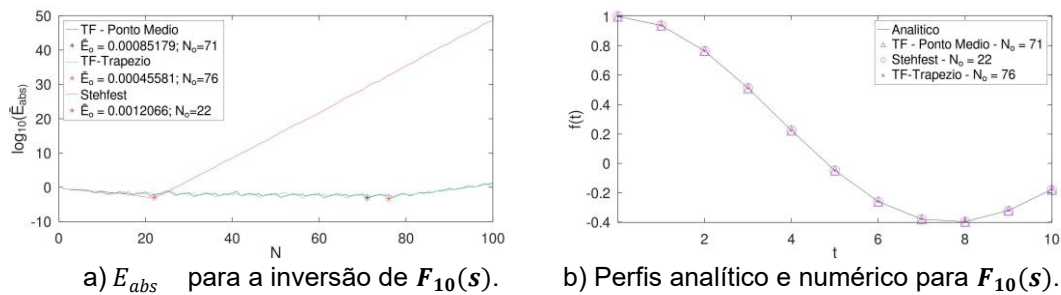
A Figura 10 mostra os testes para a inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_{10}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$. O perfil do Erro Absoluto Médio está representado na Figura 10a e uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos, na Figura 10b.

Tabela 3 – N_o e E_{abs} obtidos para as funções elementares $F_1(s)$ a $F_9(s)$.

Métodos	Função	N_o	E_{abs} (ordem)
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_1(s)$	19	10^{-14}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_1(s)$	19	10^{-14}
Stehfest	$F_1(s)$	16	10^{-7}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_2(s)$	20	10^{-14}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_2(s)$	20	10^{-14}
Stehfest	$F_2(s)$	18	10^{-6}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_3(s)$	22	10^{-14}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_3(s)$	22	10^{-14}
Stehfest	$F_3(s)$	21	10^{-3}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_4(s)$	30	10^{-12}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_4(s)$	30	10^{-13}
Stehfest	$F_4(s)$	26	10^{-1}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_5(s)$	20	10^{-14}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_5(s)$	21	10^{-14}
Stehfest	$F_5(s)$	20	10^{-6}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_6(s)$	20	10^{-14}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_6(s)$	21	10^{-14}
Stehfest	$F_6(s)$	16	10^{-7}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_7(s)$	20	10^{-14}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_7(s)$	21	10^{-14}
Stehfest	$F_7(s)$	18	10^{-7}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_8(s)$	19	10^{-14}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_8(s)$	21	10^{-14}
Stehfest	$F_8(s)$	20	10^{-6}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_9(s)$	25	10^{-13}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_9(s)$	26	10^{-14}
Stehfest	$F_9(s)$	22	10^{-4}

Fonte: Os autores (2025).

Figura 10 – Resultados para a inversão de $F_{10}(s)$.



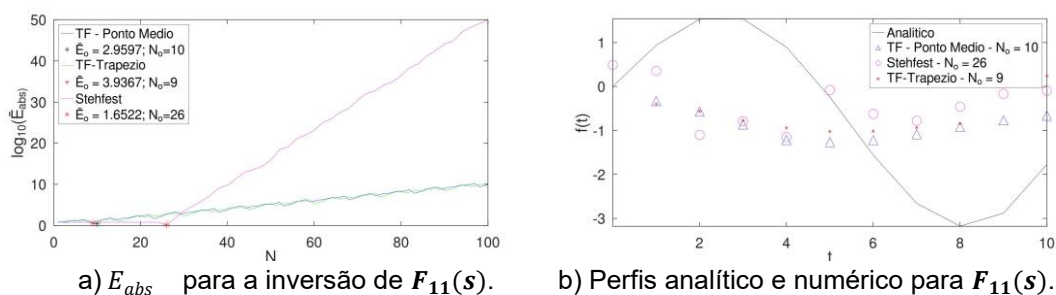
Fonte: Dos autores.

3.2.2 Inversão de $F_{11}(s)$

Os testes para a inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_{11}(s) = \frac{s}{3(\sqrt{s^2+a^2})}$ (Figura 11) estão apresentados na Figura 11a, que

traz o perfil do Erro Absoluto Médio e na Figura 11b, a partir da comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos.

Figura 11 – Resultados para a inversão de $F_{11}(s)$.

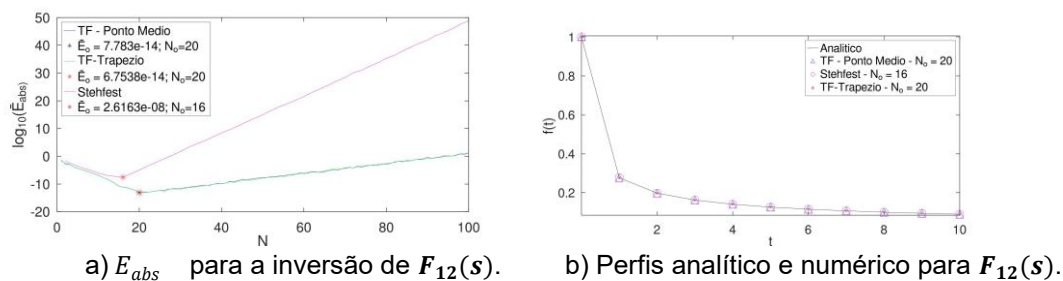


Fonte: Dos autores.

3.2.3 Inversão de $F_{12}(s)$

Os dados obtidos a partir do processo de inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_{12}(s) = \frac{1-e^{-a\sqrt{s}}}{s}$ estão na Figura 12. O perfil do Erro Absoluto Médio é mostrado na Figura 12a. Já a Figura 12b exibe uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos.

Figura 12 – Resultados para a inversão de $F_{12}(s)$.

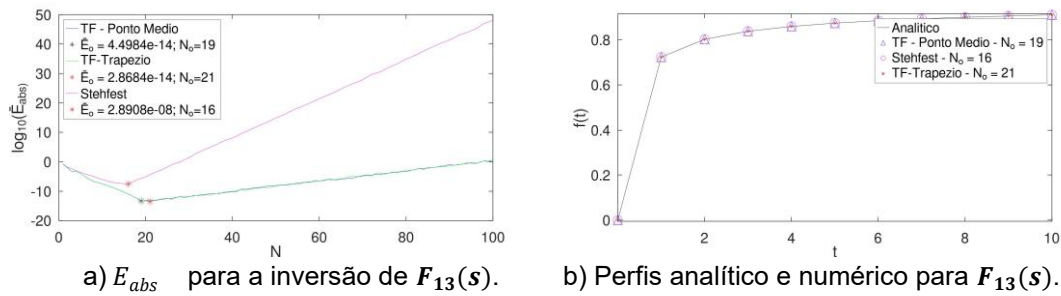


Fonte: Dos autores.

3.2.4 Inversão de $F_{13}(s)$

Os resultados para a inversão numérica da Transformada de Laplace de $F_{13}(s) = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$ estão apresentados na Figura 13. As Figuras 13a e 13b exibem, respectivamente, o perfil do Erro Absoluto Médio e uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos para $F_{13}(s)$.

Figura 13 – Resultados para a inversão de $F_{13}(s)$.

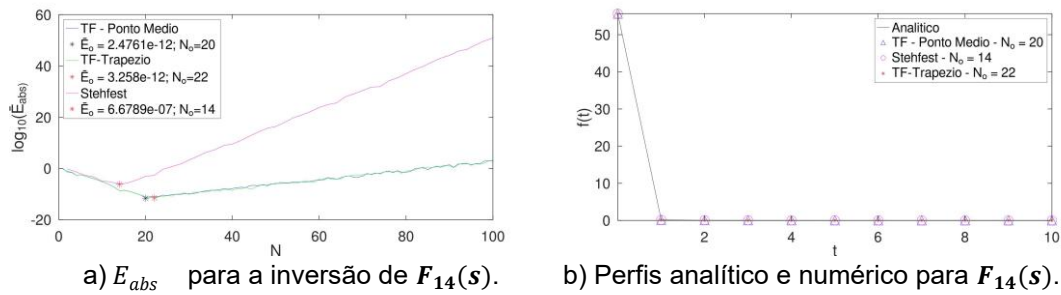


Fonte: Dos autores.

3.2.5 Inversão de $F_{14}(s)$

A Figura 14 apresenta os dados obtidos a partir da inversão numérica da Transformada de Laplace para $F_{14}(s) = \frac{a}{\sqrt{s}} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{a}{s}}\right)$. Na Figura 14a está representado o perfil do Erro Absoluto Médio e na Figura 14b, uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos para a função.

Figura 14 – Resultados para a inversão de $F_{14}(s)$.

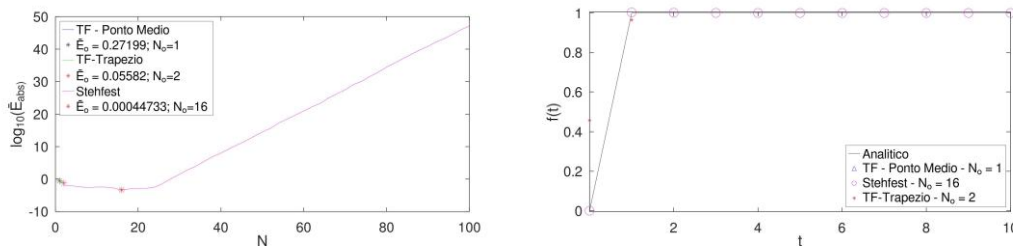


Fonte: Dos autores.

3.2.6 Inversão de $F_{15}(s)$

Os resultados obtidos para inversão numérica da Transformada de Laplace (Figura 15) para a função $F_{15}(s) = \frac{e^{-as}}{s}$ estão apresentados nas Figuras 15a e 15b que trazem, respectivamente, o perfil do Erro Absoluto Médio e uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numéricos.

Figura 15 – Resultados para a inversão de $F_{15}(s)$.



a) E_{abs} para a inversão de $F_{15}(s)$.

b) Perfis analítico e numérico para $F_{15}(s)$.

Fonte: Dos autores.

Na Tabela 4 é possível comparar os valores dos Erros Absolutos Médios obtidos para as funções $F_{10}(s)$ a $F_{15}(s)$, utilizando os métodos Talbot-Fixo, com aproximação numérica da integral pelas regras do ponto médio e do trapézio, e Stehfest. Durante o processo, o Erro Absoluto Médio foi empregado para determinar o valor do N_o ou (N ótimo), conforme calculado pela Eq. (16).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi realizado um estudo dos métodos Talbot-Fixo e Stehfest para a inversão numérica da Transformada de Laplace, quando aplicados a dois conjuntos de funções. O primeiro conjunto é composto por funções ditas elementares, cujas transformadas inversas envolvem polinômios, funções exponenciais e trigonométricas. Já o segundo, compreende funções com características especiais, cuja transformada inversa, $f(t)$, é expressa em

termos da Função de Bessel, da Função Erro Complementar ou da Função de Heaviside.

Tabela 4 – N_o e \underline{E}_{abs} obtidos para as funções $F_{10}(s)$ a $F_{15}(s)$.

Métodos	Função	N_o	\underline{E}_{abs} (ordem)
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_{10}(s)$	71	10^{-4}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_{10}(s)$	76	10^{-4}
Stehfest	$F_{10}(s)$	22	10^{-3}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_{11}(s)$	10	10^1
Talbot-Fixo Trapézio	$F_{11}(s)$	9	10^1
Stehfest	$F_{11}(s)$	26	10^1
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_{12}(s)$	20	10^{-14}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_{12}(s)$	20	10^{-14}
Stehfest	$F_{12}(s)$	16	10^{-8}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_{13}(s)$	19	10^{-14}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_{13}(s)$	21	10^{-14}
Stehfest	$F_{13}(s)$	16	10^{-8}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_{14}(s)$	20	10^{-12}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_{14}(s)$	22	10^{-12}
Stehfest	$F_{14}(s)$	14	10^{-7}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_{15}(s)$	1	10^{-1}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_{15}(s)$	2	10^{-2}
Stehfest	$F_{15}(s)$	16	10^{-4}

Fonte: Os autores (2025).

Para o algoritmo Talbot-Fixo são consideradas, ainda, as regras do trapézio (que é a habitual) e do ponto médio para a aproximação da integral de Bromwich, resultante da deformação e truncamento do contorno. Para a avaliação da performance dos métodos foi utilizada a métrica do Erro Absoluto Médio.

De um modo geral, para as funções elementares testadas, observa-se que o método Talbot-Fixo, considerando as duas formulações, regra do ponto médio e trapézio, apresenta melhores resultados ao considerar-se a ordem do Erro Absoluto Médio. A ordem do erro obtida, para ambas aproximações, foi a

mesma: 10^{-14} para a maioria das funções. Já o método de Stehfest tem erros com a ordem variando entre 10^{-7} e 10^{-1} .

Já em relação ao número de termos utilizados no somatório (N_o), o método Talbot-Fixo exigiu um número maior de termos para a inversão numérica da função $F_4(s)$. O método de Stehfest, por sua vez, aproximou todas as funções com um menor número de termos, exceto a $F_8(s)$.

Já para as funções com características especiais, a análise dos Erros Absolutos Médios aponta que o método Talbot-Fixo utilizou um maior número de termos na inversão de $F_{10}(s)$ com a ordem de 10^{-4} . Na mesma análise, para as funções $F_{12}(s)$ a $F_{14}(s)$, o método Talbot-Fixo apresenta erros da ordem 10^{-14} a 10^{-12} .

Nesse mesmo grupo de funções, quando se analisa a performance do método Stehfest, verifica-se que a ordem do Erro Absoluto Médio variou entre 10^{-8} e 10^1 , dependendo da função analisada. Em especial, nas funções $F_{12}(s) - F_{14}(s)$, embora o método Stehfest tenha chegado nos seus melhores resultados com menos termos na série, apresentou os maiores erros, variando entre 10^{-8} e 10^{-2} .

Por fim, as funções $F_{10}(s)$, $F_{11}(s)$ e $F_{15}(s)$, geraram erros elevados em todos os métodos. Nesse sentido, como os resultados apresentados aqui representam o melhor cenário de cada método sugere-se, como proposta de continuidade, estudar o emprego de outros métodos numéricos para a inversão de funções dos tipos $F_{10}(s)$, $F_{11}(s)$ e $F_{15}(s)$, a fim de melhorar o desempenho dos algoritmos nessas condições.

REFERÊNCIAS

- ABATE, J., VALKÓ, P.P. Multi-precision Laplace transform inversion. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 60, n. 5, p. 979 – 993, 2004.
- CALIXTO, G.R.L. et al. Parameter N Influence on the Fixed-Talbot Algorithm for the Laplace Transform Numerical Inversion. **VETOR – Revista de Ciências Exatas e Engenharias**, v. 32, n. 1, p. 42 – 51, 2022.

COHEN, Alan McIvor. **Numerical methods for Laplace Transform inversion**, 5 ed. New York: Springer Science & Business, 2007.

FREITAS, E.K. **Algoritmos de Inversão Numérica da Transformada de Laplace Aplicados à Solução de um Problema de Difusão de Mercúrio na Água**. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande, 2022.

GAVER, D.P.Jr. Observing stochastic processes, and approximate transform inversion. **Operations Research**, v. 14, n. 3, p. 444 – 459, 1966.

JUNQUEIRA, S.L.M. **Aplicação da transformada de Laplace ao problema inverso da condução de calor**. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1990.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**, 10 ed. New Jersey: John Wiley, 2011.

KUHLMAN, K.L. Review of inverse Laplace transform algorithms for Laplace-space numerical approaches. **Numerical Algorithms**, v. 63, p. 339 – 355, 2013.

LIN, F.F. **Numerical Inversion of Laplace Transforms by the Trapezoidal - Type Methods**, Program of Philosophy in Mathematics, Tese (Doutorado), Oregon State University, 2003.

MOENCH, A.F., OGATA, A. A numerical inversion of the Laplace transform: Solution to radial dispersion in a porous medium. **Water Resources Research**, v. 17, n. 1, p. 250 – 252, 1981.

MURLI, A., RIZZARDI, M. Algorithm 682: Talbot's method of the Laplace inversion problems. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, v. 16, n. 2, p. 158 – 168, 1990.

PACHECO, A.L.S. **Transformada de Laplace: algumas aplicações**. Monografia (Especialização), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

PAZ, M. et al. Aspectos computacionais da inversão numérica da Transformada de Laplace aplicada a um problema de Engenharia Elétrica, In: **Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional do Rio Grande do Sul**, 2023.

SILVEIRA, M.S. et al. O Método Talbot-Fixo e as Regras do Trapézio e do Ponto Médio Aplicados na Obtenção da Solução de Um Problema de Difusão de Mercúrio. In: **10ª Conferência Sul em Modelagem Computacional (10º MCSul) e X Seminário e Workshop em Engenharia Oceânica (X SEMENGO) do Rio Grande (RS)**, 2024.

STEHFEST, H. Remark on algorithm 368: Numerical Inversion of Laplace Transforms. **Communications of the ACM**. Association for Computing Machinery, v. 13, p. 624, 1970.

TALBOT, A. The accurate numerical inversion of Laplace Transforms. **IMA Journal of Applied Mathematics**, v. 23, n. 1, p. 97 – 120, 1979.