

MODELAGEM MATEMÁTICA DA DINÂMICA DO PERCEVEJO BRONZEADO E SEU PARASITOIDE *CLERUCHOIDES NOACKAE*

MATHEMATICAL MODEL FOR THE POPULATION DYNAMICS OF THE BRONZE BUG AND ITS EGG PARASITOID CLERUCHOIDES NOACKAE

Jhonatan Rodrigues Biller¹ 

Matheus Moro Moutinho² 

Alexandre Molter³ 

Resumo: O objetivo deste trabalho é propor um modelo matemático que descreva a dinâmica populacional entre o parasitoide *Cleruchoides noackae* e seu hospedeiro de ovos *Thaumastocoris peregrinus*. A interação entre essas populações é modelada como um sistema hospedeiro-parasitoide, utilizando a resposta funcional do tipo II. O sistema é formulado através de equações diferenciais ordinárias contendo quatro equações. A estabilidade de seus pontos de equilíbrio é analisada. Além disso, são realizadas simulações numéricas, utilizando dados experimentais de laboratório e apresentados alguns resultados.

Palavras-chave: Hospedeiros. Parasitoides. Modelagem Matemática. Análise de Estabilidade. Controle.

Abstract: The objective of this work is to propose a mathematical model that describes the population dynamics between the egg parasitoid *Cleruchoides noackae* and its host *Thaumastocoris peregrinus*. The interaction between these populations is modeled as a host-parasitoid system using a type II functional response. The system is formulated through a set of four ordinary differential equations. The stability of its equilibrium points is analyzed. In addition, numerical simulations are performed using experimental laboratory data, and some results are presented.

Keywords: Hosts. Parasitoids. Mathematical Modeling. Stability Analysis. Control.

¹ Mestrando em Modelagem Matemática, UFPel, jhonatanbiller.mat@gmail.com.

² Mestrando em Modelagem Matemática, UFPel, matheus.thiago.moro@gmail.com.

³ Dr. em Engenharia Mecânica, UFPel, alexandre.molter@ufpel.edu.br.

1 INTRODUÇÃO

O percevejo-bronzeado (*Thaumastocoris peregrinus*) é atualmente uma das principais pragas que impactam as plantações de eucalipto (CARPINTERO e DELLAPÉ, 2006), (OLIVEIRA e JUNIOR, 2021). Essa espécie exótica, originária da Austrália, foi identificada pela primeira vez no Brasil em 2008, na cidade de São Francisco de Assis, no Rio Grande do Sul (RS). Posteriormente, sua presença foi registrada também nos estados de São Paulo (SP) e Paraná (PR) (BARBOSA et al., 2012), (WILCKEN et al., 2010).

No Brasil, a infestação por esse percevejo tem causado prejuízos expressivos, comprometendo a produtividade dos cultivos de eucalipto. O inseto se alimenta da seiva da planta, levando a alterações fisiológicas que reduzem sua capacidade fotossintética. Os primeiros sinais da infestação incluem o prateamento das folhas, seguido pelo bronzeamento e, eventualmente, pelo seu ressecamento e queda (BARBOSA et al., 2012), (JUNQUEIRA et al., 2018).

Uma estratégia eficaz para o controle dessa praga é o uso do controle biológico. O parasitoide de ovos *Cleruchoides noackae*, uma microvespa originária da Austrália, parasita os ovos do percevejo-bronzeado, impedindo seu desenvolvimento. Em vez de um novo percevejo emergir, nasce um parasitoide adulto, contribuindo para a redução da população da praga (LIN et al., 2007).

Neste contexto, este trabalho tem como objetivo desenvolver um modelo matemático para descrever a dinâmica populacional entre o parasitoide *C. noackae* e seu hospedeiro, *T. peregrinus*. A interação entre essas populações será representada por um sistema de equações diferenciais ordinárias, considerando uma resposta funcional do tipo II (HOLLING, 1959). O modelo será composto por quatro equações que descrevem a variação das populações de ovos, ninfas, adultos e parasitoides. A análise do sistema incluirá o cálculo dos pontos de equilíbrio, seguido da verificação de sua viabilidade biológica e estabilidade. Para avaliar a precisão do modelo, serão realizadas simulações numéricas com dados experimentais obtidos em laboratório. Os resultados dessas simulações serão então comparados aos dados experimentais, a fim de

validar a capacidade do modelo de reproduzir o comportamento observado em condições de laboratório.

2 MODELO HOSPEDEIRO-PARASITOIDE

A formulação do modelo dinâmico hospedeiro-parasitoide consiste em uma estrutura compartimental, onde cada compartimento é descrito por uma equação diferencial e é composto por indivíduos correspondentes aos ovos do *T. peregrinus*, x_1 ; às ninfas do percevejo bronzeado, x_2 ; às fêmeas adultas do percevejo bronzeado, x_3 ; e ao parasitoide de ovos do *T. peregrinus*, x_4 . É considerada uma taxa de mortalidade proporcional à população em cada compartimento, com coeficientes m_1 , m_2 , m_3 e m_4 , respectivamente. A taxa de variação no número de ovos corresponde a uma taxa de oviposição de r ovos por fêmea adulta por unidade de tempo. A taxa de transferência do compartimento de ovos para o compartimento de ninfas é dada por n_1 , e do compartimento de ninfas para o compartimento de adultos do *T. peregrinus* é dada por n_2 .

A interação hospedeiro-parasitoide do modelo proposto corresponde a uma resposta funcional do tipo II, pois o parasitoide *C. noackae* é um discriminador, isto é, uma vez que o ovo de *T. peregrinus* é parasitado, ele não fica mais disponível para parasitismo, portanto, considera-se o esgotamento de recursos para o parasitoide (JULIANO, 2001), (ROGERS, 1972), (TREXLER et al., 1988).

O modelo dinâmico, composto por quatro equações diferenciais, levando em conta as populações descritas acima e o esgotamento da disponibilidade de hospedeiros, é formulado como:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= rx_3 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - n_1x_1 - m_1x_1 - \frac{ax_1x_4}{1 + ahx_1}, \\
\frac{dx_2}{dt} &= \gamma_2n_1x_1 - n_2x_2 - m_2x_2, \\
\frac{dx_3}{dt} &= \gamma_3n_2x_2 - m_3x_3, \\
\frac{dx_4}{dt} &= \frac{\gamma_4ax_1x_4}{1 + ahx_1} - m_4x_4.
\end{aligned} \tag{1}$$

Os fatores γ_2 , γ_3 e γ_4 correspondem, respectivamente, à conversão de ovos em ninfas, à conversão de ninfas em fêmeas adultas e à conversão de ovos em parasitoides. K é a capacidade suporte do ambiente, h é o tempo necessário para o parasitoide manipular um hospedeiro (não avaliado nos experimentos), e a é a taxa de busca do parasitoide (eficiência de busca por unidade de tempo).

2.1 Pontos de equilíbrio e viabilidade biológica

Os pontos de equilíbrio do sistema (1) são calculados a partir do sistema algébrico:

$$\begin{aligned}
rx_3^* \left(1 - \frac{x_1^*}{K}\right) - n_1x_1^* - m_1x_1^* - \frac{ax_1^*x_4^*}{1 + ahx_1^*} &= 0, \\
\gamma_2n_1x_1^* - n_2x_2^* - m_2x_2^* &= 0, \\
\gamma_3n_2x_2^* - m_3x_3^* &= 0, \\
\frac{\gamma_4ax_1^*x_4^*}{1 + ahx_1^*} - m_4x_4^* &= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

e denominados E_1 , E_2 e E_3 , descritos no que segue.

- O ponto de equilíbrio E_1 é dado por $E_1 = (0, 0, 0, 0)$ o qual é sempre biologicamente viável;
- O ponto de equilíbrio E_2 é calculado como:

$$E_2 = \left(x_1^*, \frac{n_1\gamma_2}{n_2 + m_2}x_1^*, \frac{n_1n_2\gamma_2\gamma_3}{m_3(n_2 + m_2)}x_1^*, 0 \right),$$

onde a densidade de ovos em equilíbrio é

$$x_1^* = K \left(1 - \frac{m_3(n_1 + m_1)(n_2 + m_2)}{n_1 n_2 r \gamma_2 \gamma_3} \right)$$

Portanto basta que $x_1^* \geq 0$ para que o ponto de equilíbrio E_2 seja biologicamente viável. Isto é: $S_1 < 1$, onde

$$S_1 = \frac{m_3(n_1 + m_1)(n_2 + m_2)}{n_1 n_2 r \gamma_2 \gamma_3};$$

- O ponto de equilíbrio de coexistência, E_3 , é calculado como:

$$E_3 = \left(x_1^*, \frac{n_1 \gamma_2 x_1^*}{n_2 + m_2}, \frac{n_1 n_2 \gamma_2 \gamma_3 x_1^*}{m_3(n_2 + m_2)}, h \left(x_1^* + \frac{1}{ah} \right) \left[\frac{r x_3^* \left(1 - \frac{x_1^*}{K} \right)}{x_1^*} - n_1 - m_1 \right] \right)$$

onde,

$$x_1^* = \frac{m_4}{a(\gamma_4 - hm_4)}.$$

Portanto, x_1^* é viável se $S_2 > 0$, onde

$$S_2 = \gamma_4 - hm_4,$$

e a viabilidade de x_4^* é satisfeita se $S_3 > 0$, onde:

$$S_3 = \frac{n_1 n_2 r \gamma_2 \gamma_3 (Ka(\gamma_4 - hm_4) - m_4)}{Kam_3(n_2 + m_2)(\gamma_4 - hm_4)} - n_1 - m_1.$$

2.2 Análise de estabilidade

Nesta seção será analisada a estabilidade local de três pontos de equilíbrio, E_1 , E_2 e E_3 , utilizando o critério de Routh-Hurwitz.

- O ponto E_1 é localmente estável se, e somente se, $S_1 > 0$;
- O ponto E_2 é localmente estável se, e somente se, $S_4 > 0$, onde

$$S_4 = D\gamma_4 - m_4 \text{ e } D \text{ é uma constante definida como}$$

$$D = \frac{Ka[n_1 n_2 r \gamma_2 \gamma_3 - m_3(n_1 + m_1)(n_2 + m_2)]}{Kah[n_1 n_2 r \gamma_2 \gamma_3 - m_3(n_1 + m_1)(n_2 + m_2)] + n_1 n_2 r \gamma_2 \gamma_3};$$

- O ponto E_3 é localmente estável se $S_4 > 0$ e $S_6 > 1$, onde:

$$S_5 = \frac{Fm_3m_4}{\gamma_4} + \frac{BFm_4}{\gamma_4} + \frac{Cm_4r}{E} + BGm_3 - Cr,$$

$$S_6 = \frac{E(m_3 + G + B)(Gm_3\gamma_4 + Bm_3\gamma_4 + BG\gamma_4 + Fm_4)H}{BE^2Fm_3(m_3 + G + B)^2m_4\gamma_4 + H^2},$$

$$H = Cm_4r\gamma_4 - CEr\gamma_4 + BEGm_3\gamma_4 + EFm_3m_4 + BEFm_4,$$

$$G = \frac{F}{\gamma_4} \left(1 - \frac{hm_4}{\gamma_4}\right) + \frac{m_4Cr}{m_3BE} + A,$$

$$F = \frac{E}{Ka} \left[\frac{Cr(E - m_4)}{BE m_3} - A \right],$$

$$E = Ka(\gamma_4 - hm_4),$$

$$C = n_1n_2\gamma_2\gamma_3,$$

$$B = n_2 + m_2 \quad \text{e} \quad A = n_1 + m_1.$$

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, será apresentado o modelo matemático proposto e sua simulação para o caso de laboratório, com o objetivo validar os parâmetros utilizados. A comparação entre as simulações e os resultados experimentais obtidos em laboratório permitirá a avaliação da precisão do modelo.

O experimento de parasitismo foi conduzido com a exposição dos parasitoides aos hospedeiros por um dia, ou seja, $T = 1$, a uma temperatura de 24°C, com 20 repetições para cada oferta de ovos. Os valores descritos na Tabela 1 referem-se às médias das medições. Cada oferta de ovos $x_1^{(0)}$ foi exposta a um casal de parasitoides, mas somente a fêmea é capaz de parasitar.

Os parâmetros do sistema (1) foram obtidos a partir de experimentos realizados no laboratório de entomologia do pesquisador Leonardo Rodrigues Barbosa, da EMBRAPA Florestas, na cidade de Colombo, no estado do Paraná, Brasil. Os parâmetros foram determinados diretamente a partir dos dados tabulados obtidos nos experimentos e estão listados na Tabela 2, juntamente com as referências correspondentes. Para as simulações numéricas foi utilizado Python.

Tabela 1 – Parasitismo de *C. noackae* em ovos de *T. peregrinus*.

Ovos oferecidos	Ovos parasitados	Ninfas eclodidas
2	1,1	0,6
5	3,75	0,6
10	3,8	3,75
20	4,7	6,5
40	3,4	21,6
60	5,85	27,15
80	5,05	31,9
100	6,4	48,95

Fonte: Leonardo Barbosa (Embrapa Florestas).

Tabela 2 – Parasitismo de *C. noackae* em ovos de *T. peregrinus*.

Parâmetro	Valor	Referência
r	1,6	(BARBOSA et al., 2019)
m_1	1/8	do experimento
m_2	1/(8,3)	do experimento
m_3	1/(40,5)	(BARBOSA et al., 2019)
m_4	1/(2,1)	(BECCHI et al., 2023)
n_1	1/(7,35)	(BARBOSA et al., 2019)
n_2	1/(22,7)	(BARBOSA et al., 2019)
γ_3	0,48	do experimento
γ_2	1	do experimento
γ_4	0,67	do experimento
h	0,18	do experimento
a	1,82	do experimento
K	700	do experimento

Fonte: Elaborada pelos autores a partir de dados experimentais.

3.1 Validação do modelo

A validação do modelo (1), é realizada com base em dados experimentais de laboratório. Como o experimento laboratorial não abrange todos os parâmetros do modelo completo, é necessário considerar uma versão reduzida do mesmo, de modo a possibilitar a comparação com os dados disponíveis. O objetivo é comparar os dados experimentais com as simulações numéricas. Assim, as equações são simplificadas para refletir as informações disponíveis a partir do experimento de parasitismo com duração de 1 dia, são elas: a quantidade de ovos oferecida ao parasitoide, a quantidade de ovos parasitados e o número de ninfas emergidas. O fator de conversão γ_4 , que relaciona ovos a parasitoides fêmeas, não é aplicado neste experimento, pois não há distinção

entre os ovos parasitados. Além disso, a mortalidade de ninfas e a conversão de ninfas para adultos também não são consideradas. Assim, o sistema (1) é reduzido para uma forma que considera apenas um parasitoide e uma condição inicial de ovos $x_1^{(0)}$, resultando no seguinte sistema de equações:

- Para $0 \leq t < 1$:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -m_1x_1 - n_1x_1 - \frac{ax_1}{1 + ahx_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \gamma_2n_1x_1, \\ \frac{dx_4}{dt} &= \frac{ax_1}{1 + ahx_1}.\end{aligned}\tag{3}$$

- Para $t > 1$:

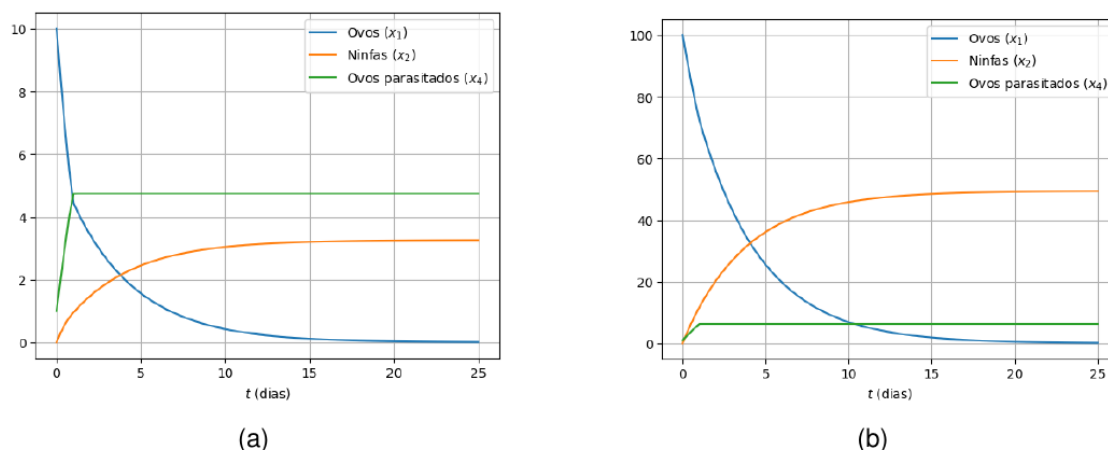
$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -m_1x_1 - n_1x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \gamma_2n_1x_1.\end{aligned}\tag{4}$$

Considerando os parâmetros da Tabela 2, foram simulados os sistemas (3) e (4). Nas Figuras 1a e 1b, são apresentadas as curvas das populações de ovos x_1 , ninfas x_2 e parasitoides x_4 para as condições iniciais $x_1^{(0)} = 10$ e $x_1^{(0)} = 100$, respectivamente. Em ambas as simulações, foi considerado um parasitoide inicial $x_4^{(0)} = 1$. As simulações ocorreram ao longo de um período de 25 dias. Embora o tempo estimado para o nascimento dos parasitoides seja de cerca de 15 dias e das ninfas de 7 dias, devido à natureza contínua do sistema, a estabilização das populações leva mais de 15 dias. Após o primeiro dia, o valor de a é redefinido para zero, uma vez que a exposição dos parasitoides aos ovos ocorre apenas por 1 dia.

Na simulação com 10 ovos inicialmente ofertados ao parasitoide (Figura 1a), observa-se que, após 1 dia de exposição dos ovos aos parasitoides, 3,74 ovos foram parasitados e 3,26 ninfas emergiram. Esses valores estão em conformidade com os dados experimentais, que registram 3,8 ovos parasitados e 3,75 ninfas emergidas para esse caso.

De maneira semelhante, na simulação com 100 ovos iniciais (Figura 1b), obtêm-se, após 1 dia de exposição dos ovos aos parasitoides, 5,23 ovos parasitados e 49,32 ninfas emergidas, valores próximos aos observados experimentalmente, onde foram registrados 6,4 ovos parasitados e 48,95 ninfas emergidas.

Figura 1 – Trajetórias das populações de ovos (x_1), ninfas (x_2) e parasitoide (x_4).



Fonte: Dos autores.

Esses resultados indicam que os parâmetros apresentados na Tabela 2 estão adequadamente ajustados para representar o modelo de laboratório. Na próxima seção, esses mesmos parâmetros são aplicados ao sistema (1), considerando-se a livre interação entre todas as populações.

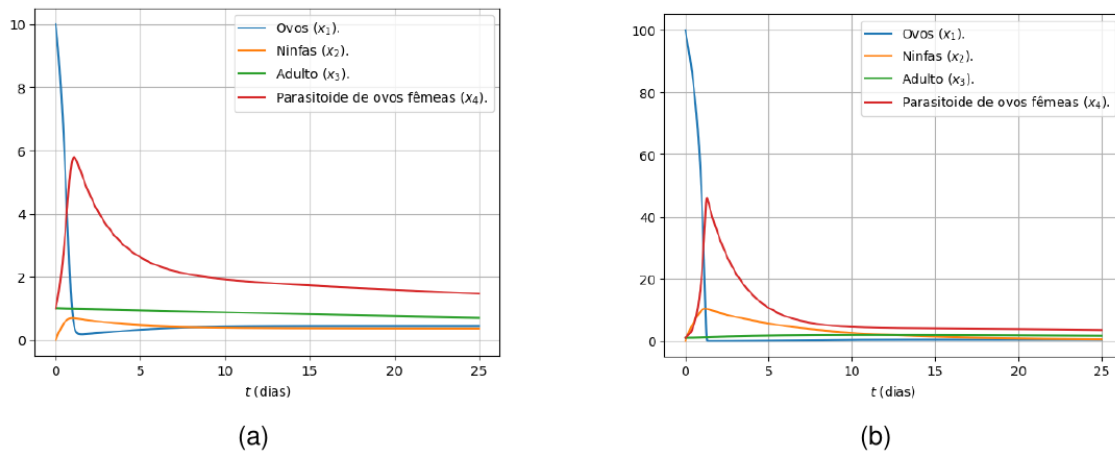
3.2 Simulação da dinâmica completa

As Figuras 2a e 2b apresentam as simulações do sistema (1), considerando os parâmetros da Tabela 2 e as condições iniciais de 10 ovos (Figura 2a) e 100 ovos (Figura 2b), além de 0 ninfas, 1 adulto e 1 parasitoide.

Na Figura 2a, com $x_1^{(0)}=10$, a população de parasitoide parasitam aproximadamente 5 ovos em um dia. Já na Figura 2b, com $x_1^{(0)}=100$, a população de parasitoides parasitam cerca de 45 ovos em aproximadamente 1,25 dias. Em ambos os casos, fica evidente a eficiência do parasitoide no

modelo completo, resultando em uma queda acentuada na quantidade de ovos em menos de dois dias, seja para $x_1^{(0)}=10$ ou $x_1^{(0)}=100$.

Figura 2 – Trajetórias das populações de ovos (x_1), ninfas (x_2), adultos (x_3), e parasitoides (x_4),



Fonte: Dos autores.

4 DISCUSSÕES E CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi proposto um modelo matemático para descrever a dinâmica das populações de *T. peregrinus* e *C. noackae* utilizando um modelo hospedeiro-parasitoide. Foram determinados os pontos de equilíbrio do sistema, bem como sua viabilidade biológica e estabilidade.

Para avaliar a precisão do modelo, realizou-se uma comparação entre as simulações de uma versão reduzida do sistema e dados experimentais de laboratório. Os resultados, apresentados nas Figuras 1a e 1b, mostram concordância com os experimentos, indicando que o modelo proposto representa adequadamente a interação hospedeiro-parasitoide observada.

Por fim, as simulações do modelo completo, ilustradas nas Figuras 2a e 2b, evidenciaram a eficiência do parasitoide, que foi capaz de parasitar todos os ovos ofertados em menos de dois dias, o que está de acordo com o resultado de laboratório apresentado no trabalho de Barbosa et al. (2017). Esses resultados reforçam a capacidade do modelo em capturar com precisão razoável a dinâmica da interação entre as populações estudadas.

AGRADECIMENTOS

O presente estudo foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Os autores também agradecem o apoio da FAPERGS e da FGV. Os autores expressam seus agradecimentos ao pesquisador Leonardo Rodrigues Barbosa, da EMBRAPA Florestas, em Colombo, Paraná, pela disponibilização dos dados experimentais utilizados neste estudo.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, L. R. et al. Biological parameters, life table and thermal requirements of *Thaumastocoris peregrinus* (Heteroptera: Thaumastocoridae) at different temperatures. **Scientific Reports**, v. 9, n. 1, p. 1–8, 2019.
- BECCHI, L. K. et al. Thermal requirements, fertility life table and biological parameters of *Cleruchoides noackae* (Hymenoptera: Mymaridae) at different temperatures. **PeerJ**, v. 11, p. e14911, 1–19, 2023.
- CARPINTERO, D. L.; DELLAPÉ, P. M. A new species of *Thaumastocoris* Kirkaldy from Argentina (Heteroptera: Thaumastocoridae: Thaumastocorinae). **Zootaxa**, v. 1228, n. 1, p. 61–68, 2006.
- HOLLING, C. S. Some characteristics of simple types of predation and parasitism. **The Canadian Entomologist**, v. 91, p. 385–398, 1959.
- JULIANO, S. A. Nonlinear curve fitting: predation and functional response curves. In: SCHEINER, S. M.; GUREVITCH, J. (Ed.). **Design and Analysis of Ecological Experiment**. New York: Oxford University Press, 2001. p. 178-196.
- JUNQUEIRA, L. R.; BARBOSA, L. R.; WILCKEN, C. F. Quantification of damages by *Thaumastocoris peregrinus* (Hemiptera: Thaumastocoridae) in eucalyptus. In: **Proceedings of the IUFRO Working Party**. 2018.
- LIN, N.-Q.; HUBER, J. T.; SALLE, J. L. The Australian genera of Mymaridae (Hymenoptera: Chalcidoidea). **Zootaxa**, v. 1596, n. 1, p. 1-111, 2007.
- OLIVEIRA, E. B. D.; JUNIOR, J. E. P. **O eucalipto e a Embrapa: quatro décadas de pesquisa e desenvolvimento**. Embrapa Florestas, 2021.
- ROGERS, D. Random search and insect population models. **Journal of Animal Ecology**, v. 41, n. 2, p. 369-383, 1972.
- TREXLER, J. C.; MCCULLOCH, C. E.; TRAVIS, J. How can the functional response best be determined? **Oecologia**, v. 76, p. 206-214, 1988.
- WILCKEN, C. F. et al. Bronze bug *Thaumastocoris peregrinus* Carpintero e Dellapé (Hemiptera: Thaumastocoridae) on eucalyptus in Brazil and its distribution. **Journal of Plant Protection Research**, p. 201-205, 2010.