

DETERMINAÇÃO DA CURVA DE RESFRIAMENTO DA ÁGUA EM AMPOLAS DE GARRAFAS TÉRMICAS

DETERMINATION OF THE COOLING CURVE OF WATER IN AMPOULES OF THERMAL BOTTLES

Andressa Tais Diefenthäler¹
Peterson Cleyton Avi²

Resumo: Observando aspectos relacionados a Termodinâmica, o relato do experimento prático realizado refere-se ao processo de resfriamento da água quente em quatro tipos de ampolas de vidro, diferenciadas pela presença ou ausência de vácuo e espelhamento. Com os dados obtidos no experimento, objetivou-se encontrar a equação da curva característica deste resfriamento em cada recipiente, a partir da resolução do Problema Inverso via método de Procura em Rede. Para validação dos modelos matemáticos elaborados, foi realizada uma comparação com as soluções obtidas na resolução do Problema Direto, considerando a Lei de Resfriamento de Newton. Através da análise comparativa dos resultados, evidenciou-se a eficiência do método de Procura em Rede para a situação explorada, pois obteve-se elevados coeficientes de determinação e os resultados se mostraram coerentes com os dados experimentais e com a solução do Problema Direto. O método de Procura em Rede foi escolhido devido à facilidade de compreensão e implementação computacional, assim como a viabilidade na obtenção de até três parâmetros; entretanto, para um número maior de parâmetros, este método seria inviável, por ser exaustivo e demandar tempo de simulação. Além disso, com os experimentos e procedimentos matemáticos realizados, foi possível verificar que a ampola com melhor desempenho, dentre as testadas, é a fabricada em vidro com vácuo e espelhada.

Palavras-chave: Termodinâmica. Problema Inverso. Procura em Rede. Lei de Resfriamento de Newton.

Abstract: Observing aspects related to Thermodynamics, the report of practical experiment carried out refers to the process of cooling hot water in four types of glass ampoules, differentiated by the presence or absence of vacuum and mirroring. With the data obtained in the experiment, objected to find the equation of the characteristic curve of this cooling in each container, from the resolution of Inverse Problem through the Network Search method. For the validation of the elaborated mathematical models, a comparison was made with the solutions obtained in the resolution of the Direct Problem, considering Newton's Cooling Law. Through the comparative analysis of the results, the efficiency of the Network Search method was evidenced for the exploited situation, because high coefficients of determination were obtained and the results were consistent with the experimental data and with the Direct Problem solution. The Network Search method was chosen due to the ease of understanding and computational implementation, as well as the feasibility of obtaining up to three parameters; however, for a larger number of parameters, this method would be impractical, because it is exhaustive and requires time for simulation. In addition, with the experiments and mathematical procedures performed, it was possible to verify that the best performing ampoule, among those tested, is the one made of glass with vacuum and mirrored.

Keywords: Thermodynamics. Inverse Problem. Network Search. Newton's Cooling Law.

¹ Graduada em Matemática-Licenciatura, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. andressa_td@hotmail.com.

² Mestre em Modelagem Matemática, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. peterson.avi@unijui.edu.br.

1 INTRODUÇÃO

A Termodinâmica é uma área da Física dedicada ao estudo do *movimento do calor*, a qual auxilia na explicação de vários fenômenos físicos reais, relacionados à variação da temperatura. A temperatura é uma das grandezas fundamentais do Sistema Internacional de medidas (SI),

[...] e está relacionada às nossas sensações de quente e frio. É medida com um termômetro, instrumento que contém uma substância com uma propriedade mensurável, como comprimento ou pressão, que varia de forma regular quando a substância se torna mais quente ou mais fria (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012, p. 204).

No dia a dia, são várias as situações e fenômenos relacionados à Termodinâmica, como, por exemplo, a conservação da água quente em garrafas térmicas, a qual está diretamente relacionada ao fenômeno da transferência de calor, sendo o calor, conforme Halliday; Resnick; Walker (2012, p. 190), “[...] a energia transferida de um sistema para o ambiente ou vice-versa em virtude de uma diferença de temperatura”; esta energia térmica se transfere de um sistema com temperatura maior para um de temperatura menor, até que ambos atinjam uma mesma temperatura, isto é, atinjam o equilíbrio térmico.

O tempo de conservação da água quente em uma garrafa térmica está diretamente associado ao tipo de ampola contida em seu interior, a qual é fabricada em materiais específicos, visando obter o máximo de isolamento para a manutenção da temperatura dos líquidos contidos no recipiente. Neste contexto, a maioria das ampolas são feitas de vidro, as quais podem ser fabricadas com a presença ou ausência de vácuo e espelhamento. A partir disso, estabelece-se o questionamento: *Qual tipo de ampola conserva a água quente por mais tempo?*

Para responder a este problema, foram realizadas pesquisas bibliográficas acerca da Termodinâmica, no que se refere principalmente aos processos de transferência de calor e ao funcionamento de garrafas térmicas. Os dados apresentados neste artigo foram obtidos a partir da realização de um experimento por uma acadêmica de graduação em Licenciatura em Matemática de uma universidade do noroeste do Rio Grande do Sul, o qual envolveu o processo de resfriamento da água em quatro tipos de ampolas de garrafas

térmicas, que se diferenciam quanto à presença ou ausência de vácuo e espelhamento.

Diante disto, este artigo tem por objetivo relatar o experimento realizado e, a partir dos dados experimentais, apresentar os procedimentos para obtenção das equações da curva característica do resfriamento da água nas quatro ampolas, através do Problema Inverso via método de Procura em Rede, validando-as a partir da comparação com os resultados obtidos pela solução do Problema Direto, através da Lei de Resfriamento de Newton.

2 TERMODINÂMICA E O FUNCIONAMENTO DE AMPOLAS

A Termodinâmica está relacionada ao estudo de diversos fenômenos do cotidiano que envolvem variações de temperatura, os quais instigam quanto a sua causa ou efeito. Dentre estas situações, destaca-se neste artigo o resfriamento da água quente em garrafas térmicas.

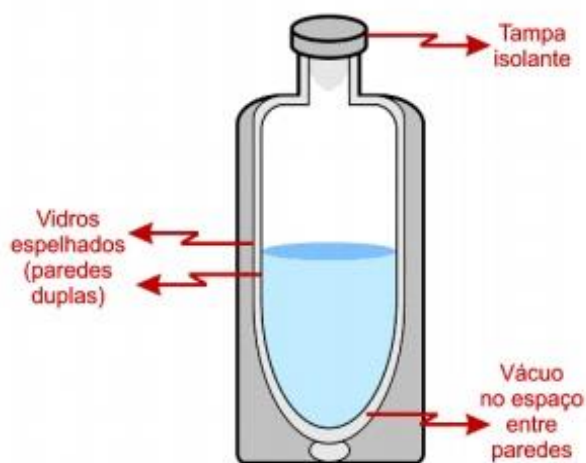
A garrafa térmica é um recipiente composto de um corpo externo (jarra ou garrafa fabricada em diferentes materiais como plástico, inox) e de uma parte interna constituída por uma ampola (geralmente de vidro). Estas garrafas são utilizadas largamente no cotidiano dos indivíduos para conservar a temperatura de bebidas, quentes ou geladas, sendo fabricadas também em diferentes capacidades e com diferentes sistemas de armazenamento.

A invenção destes recipientes está relacionada à criação do *frasco de Dewar*, no século XIX, pelo professor físico-químico escocês James Dewar (1842 - 1923). Dewar, ao realizar seus estudos sobre Criogenia (estudo da produção de temperaturas muito baixas e seus fenômenos), percebeu que o melhor isolador térmico é o vácuo, e então iniciou a fabricação de garrafas com paredes duplas, deixando um espaço entre elas (vácuo) e revestindo seu interior com uma película de prata, de modo a refletir a radiação (IBARRA, 2008).

Atualmente, as ampolas são compostas geralmente por duas paredes de vidro, com ou sem vácuo entre elas, podendo ou não ser espelhadas (Figura 1). Conforme Marques; Araújo (2009), estes materiais constituintes são determinantes para o funcionamento dos recipientes, o qual se baseia no

princípio de evitar a troca de calor entre o conteúdo de seu interior e o ambiente, buscando impedir a ocorrência das três formas de transferência de calor: condução, convecção e radiação.

Figura 1 – Representação de uma ampola



Fonte: Marques; Araújo (2009, p. 50).

Na transferência de calor por condução, a troca se dá pelo choque das partículas que compõem o sistema (i. e. colisões entre os átomos dos materiais que estão em contato) (INCROPERA, 2011). Desta forma, nas ampolas a condução é evitada devido ao material do qual são produzidas, o vidro, que é considerado um bom isolante térmico (ou seja, um mau condutor), por possuir alta resistência térmica (R), uma propriedade obtida pela razão entre a espessura L de uma placa e a condutividade térmica k do material em que é fabricada: $R = \frac{L}{k}$. O coeficiente de condutividade térmica k é uma característica específica de cada material que quantifica sua habilidade de conduzir energia térmica (i.e. calor); k depende da temperatura e da pureza do material. Deste modo, materiais como o vidro, que possuem condutividade térmica mais baixa (aproximadamente $1,0 \text{ W/mK}$), têm maior capacidade de conservação de calor (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2009).

Além disso, a região de vácuo entre as paredes duplas das ampolas também serve para evitar a transferência de calor por condução e por convecção. A troca por convecção ocorre nos fluidos (gases e líquidos), ocasionada pela diferença de densidade dos componentes do sistema (o fluido mais quente se expande, se torna menos denso e sobe, enquanto o mais frio,

mais denso, se direciona para baixo, gerando as correntes de convecção) (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2009). Desta forma, o vácuo, assim como a presença de uma tampa isolante (para manter a garrafa fechada), evitam que ocorra contato entre a água quente e o ar e, assim, atenuam esta forma de transferência de calor.

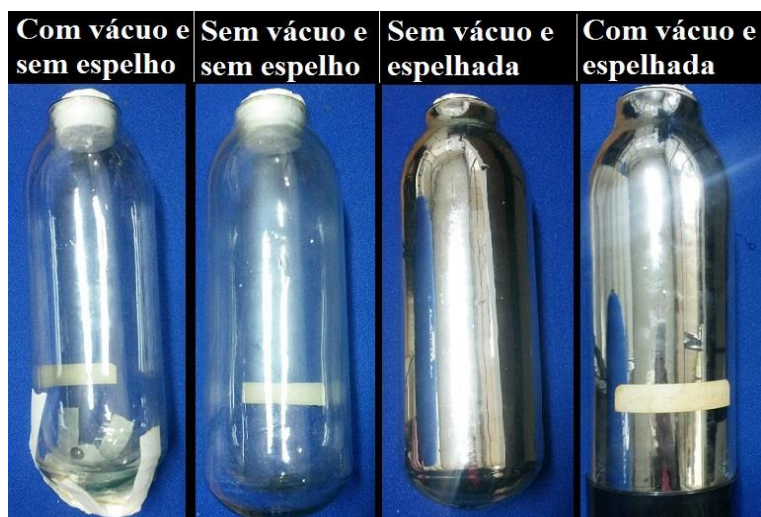
Quando as ampolas são espelhadas (tanto pelo lado de fora quanto no de dentro), o calor é refletido, o que diminui as trocas por radiação. Nesta forma de transferência, não há contato entre os corpos, mas as trocas ocorrem a partir da emissão de ondas eletromagnéticas. Quando as ampolas são revestidas por material prateado (i.e. são espelhadas), os raios infravermelhos emitidos pela água quente são refletidos e a temperatura no interior do recipiente tende a se manter constante.

Deste modo, devido às características das ampolas, pode-se reduzir a transferência de calor (por condução, convecção e radiação) e conservar a água quente por mais tempo no interior das garrafas térmicas. No entanto, mesmo assim, após algum tempo, verifica-se que a água esfria, isto porque não existem materiais isolantes perfeitos e sempre ocorre alguma troca de calor através da tampa, ou do próprio vidro (MARQUES; ARAÚJO, 2009).

3. OBTENÇÃO DOS DADOS: RELATÓRIO DO EXPERIMENTO

Para a realização dos experimentos, foram utilizadas quatro ampolas de vidro cedidas por uma fábrica de garrafas térmicas, de mesmo tamanho e com capacidade de 1L, diferenciadas pela presença ou ausência de vácuo e espelhamento, conforme a Figura 2.

Figura 2 – Ampolas utilizadas no experimento



Fonte: Produção da pesquisadora.

Em cada ampola foi adicionado um volume de 1L de água quente a uma temperatura inicial de 70°C. A medição das temperaturas foi realizada utilizando quatro termômetros de Mercúrio, com variação de -10°C a 110°C. Com o objetivo de reduzir os erros experimentais relacionados ao instrumento de medição e indicar uma temperatura mais precisa, buscou-se, a partir dos registros fotográficos dos experimentos, dividir cada intervalo de 1°C indicado nos termômetros em dez subintervalos, de 0,1°C. A temperatura externa foi medida ao início e ao final do experimento, sendo controlada em 23°C. As ampolas foram fechadas com isopor (material isolante) e os termômetros acoplados em um orifício na parte superior das mesmas, conforme a Figura 3.

Figura 3 – Sistema de medição das temperaturas nas ampolas



Fonte: Produção da pesquisadora.

As temperaturas foram registradas a cada 20min (1200s pelo S1) em graus Celsius, por um tempo de 7 horas (25200s), totalizando 22 medições. Os dados obtidos são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Conjunto de dados obtidos no processo de resfriamento da água nas ampolas

	Com vácuo e sem espelho	Sem vácuo e sem espelho	Sem vácuo e espelhada	Com vácuo e espelhada
Tempo (s)	Temperatura (°C)	Temperatura (°C)	Temperatura (°C)	Temperatura (°C)
0	70	70	70	70
1200	67	65,7	66,8	69,5
2400	64,2	61,5	64	69
3600	61,7	57,8	61,5	68,3
4800	59	54,5	58,7	67,9
6000	56,9	51,5	56	67
7200	54,8	48,9	53,9	66,7
8400	52,8	46,3	51,9	66
9600	51	44,2	49,9	65,6
10800	49	42,2	48	65
12000	47,7	40,5	46,5	64,5
13200	46,2	39	45	64
14400	44,7	37,5	43,5	63,5
15600	43,3	36	42	63
16800	42,2	34,9	41	62,5
18000	41,2	34	40	62
19200	40,2	32,9	38,8	61,5
20400	39	32	37,8	61
21600	38,2	31,2	36,8	60,5
22800	37,4	30,5	36	60
24000	36,7	29,9	35,3	59,7
25200	36,1	29,3	34,7	59,3

Fonte: Dados produzidos pela pesquisadora a partir do experimento.

A partir dos dados obtidos nos experimentos, foi possível verificar as características, fenômenos e processos físicos discutidos na pesquisa bibliográfica, concluindo-se que a ampola na qual a água é conservada quente por mais tempo é a fabricada em vidro com vácuo e espelhada, seguida então pela ampola com vácuo e sem espelho, e de modo próximo também pela ampola sem vácuo e espelhada. Aquela que demonstrou pior desempenho foi a ampola sem vácuo e sem espelho (apenas com a dupla camada de vidro).

4. MODELAGEM MATEMÁTICA: PROBLEMA INVERSO E PROBLEMA DIRETO

Ao observar as tabelas com os dados obtidos em cada experimento, já foi possível verificar qual tipo de ampola conserva a água quente por mais tempo e, ao construir o gráfico de dispersão referente a cada conjunto de dados, verificou-se que estes apresentam comportamento de uma função exponencial natural decrescente, pois a temperatura da água diminui e tende a se estabilizar ao longo do tempo, até atingir o equilíbrio térmico com o meio externo.

Neste contexto, tem-se a curva $y = A \cdot e^{-Bx} + C$, com três parâmetros A , B e C não linearizáveis. Para obter as equações características dos conjuntos de dados (ajuste não linear de curvas), optou-se pela resolução do Problema Inverso via método de Procura em Rede. Para validação das equações obtidas a partir deste método, foi realizado um comparativo com as equações e coeficientes de determinação encontrados pela resolução do Problema Direto, considerando, para isso, a Lei de Resfriamento dos corpos de Newton.

4.1 Problema Inverso via método de Procura em Rede

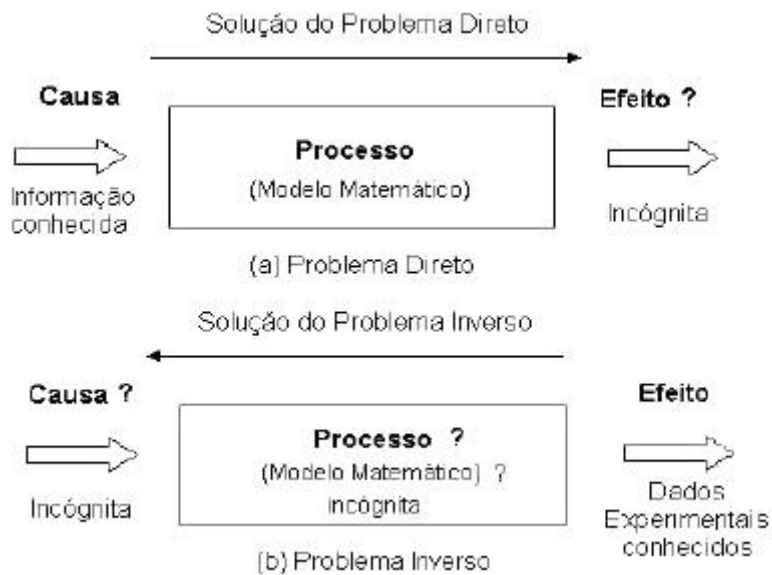
Os experimentos realizados permitiram obter dados relacionados ao processo de resfriamento da água quente em diferentes ampolas de vidro. Neste contexto, tem-se os efeitos do fenômeno (os dados experimentais), mas suas causas são desconhecidas, assim como a equação (modelo matemático) que representa o fenômeno e permite obter estes dados.

Esta situação pode ser resolvida a partir do Problema Inverso, o qual consiste em determinar causas desconhecidas a partir de efeitos desejados ou observados (ENGL; HANKE; NEUBAUER, 1996). No caso dos experimentos realizados, tem-se o tempo (s) e a temperatura (°C) e deseja-se encontrar os parâmetros da equação característica que permite obter estes valores (as causas que levam a ocorrência do fenômeno).

Na Figura 4 é apresentado um esquema diferenciando as soluções pelo Problema Direto e Problema Inverso. Segundo Silva Neto (2012), na resolução

pelo Problema Direto, a causa e a equação são conhecidas - Lei de Resfriamento de Newton -, a partir dos quais são determinados os efeitos - a temperatura que a água atinge em um determinado tempo. Já na resolução pelo Problema Inverso, tem-se apenas os dados experimentais e, observando seu comportamento e empregando métodos numéricos, é possível modelar os dados e obter uma equação que "cause estes efeitos".

Figura 4 - Esquema de representação do (a) Problema Direto e do (b) Problema Inverso



Fonte: Silva Neto (2008).

Assim, tratando-se de um problema inverso, o problema aqui apresentado é considerado um problema mal-posto. Conforme Hadamard (1923), um problema bem-posto é aquele que apresenta três características:

- a) existência de solução;
- b) unicidade (existência de uma única solução);
- c) estabilidade da solução (a solução tem uma dependência contínua (suave) com os dados de entrada).

Na situação apresentada neste artigo, as observações são imprecisas (pode haver ocorrência de erros experimentais) e, por se tratar de uma função exponencial com três parâmetros a determinar, estes podem assumir diferentes valores, de acordo com a margem de erro aceitável, o que resulta em diferentes soluções. Estas são algumas características de um problema mal-posto evidenciadas nesta situação.

Considerando a resolução pelo Problema Inverso, para a determinação dos parâmetros da equação $y = A \cdot e^{-B \cdot x} + C$, utilizou-se o método de Procura em Rede, o qual consiste na definição de intervalos para cada parâmetro a ser estimado (intervalos válidos), considerados possíveis de solução, e de um número de partições para cada intervalo. Este método “[...] encontra o melhor conjunto de parâmetros por exaustão, calculando as distribuições dos dados através de todas as possibilidades de combinações dos coeficientes ou parâmetros, dentro dos intervalos iniciais” (SILVA, 2013, p. 24). Assim, conforme Silva Neto; Moura Neto (2005), este método pode ser considerado um método de soluções subótimas, pois não há um critério de convergência e a garantia de que a solução ótima pertença aos intervalos pré-definidos.

Há diferentes métodos para resolução de um Problema Inverso (VELHO, 2008), sendo que a escolha pelo algoritmo de Procura em Rede se deve à sua eficiência e praticidade, por ser possível pré-definir intervalos para os parâmetros a ser estimados (A , B e C) e não envolver o cálculo de derivadas. Apesar do método ser exaustivo (combinar todas as possibilidades de solução), neste problema busca-se a determinação de apenas três parâmetros, número este que não demanda grande tempo de execução, o que possibilita uma solução via método Procura em Rede de modo fácil e eficiente.

Desta forma, para encontrar a curva característica dos dados experimentais a partir deste método, utilizou-se um programa de autoria própria elaborado no *software* de computação algébrica e numérica *Matlab*. Este programa solicita a inserção das informações:

- Número de pontos: no experimento realizado obteve-se conjuntos com 22 pontos cada;
- Vetor X : vetor do tempo em segundos (s);
- Vetor Y : vetor das temperaturas em graus Celsius ($^{\circ}C$); Intervalos prévios em que podem estar situados os valores dos parâmetros: A (0 a 50), B (-0,01 a 0) e C (0 a 50);
- Um número no qual será dividido cada um destes intervalos: 1000.

A escolha dos valores dos intervalos de A , B e C e do número de subdivisões foi realizada a partir da observação do diagrama de dispersão dos

dados coletados. Através do mesmo, evidenciou-se que a temperatura diminuiu ao longo do tempo, mas permanece positiva até atingir o equilíbrio térmico com o meio, o qual se manteve a uma temperatura constante de 23°C, o que justifica a escolha pelos intervalos de 0 a 50 para os parâmetros A e C . Quanto ao parâmetro B , verificou-se que a variação de temperatura é muito pequena para um intervalo grande de tempo (em segundos) e será negativa, devido ao processo de resfriamento (exponencial decrescente), por isso optou-se pelo intervalo de -0,01 a 0, adotando 1000 divisões para todos os intervalos.

Considerando o método de Procura em Rede, foi utilizado o seguinte algoritmo para a determinação dos parâmetros:

1º Passo - Estima-se os intervalos (mínimo e máximo) de valores de cada parâmetro A , B , C , que contenham o valor ótimo de A , B , C .

2º Passo - Constrói-se uma partição de n pontos em que é dividido cada intervalo (neste caso, tem-se 1000 valores possíveis para A , 1000 para B e 1000 possibilidades para o valor de C).

3º Passo - Para cada conjunto de valores ($A_1, A_2, \dots, A_{1000}$; $B_1, B_2, \dots, B_{1000}$; $C_1, C_2, \dots, C_{1000}$), resolve-se a função que representa o Problema Direto.

4º Passo - Calcula-se as diferenças entre as soluções estimadas e os dados experimentais.

5º Passo - Identifica-se a menor diferença, a qual corresponde ao conjunto de parâmetros A , B e C ótimos para o intervalo estimado.

Deste modo, a partir da inserção dos dados e informações no programa em *Matlab* e da resolução via método de Procura em Rede, este programa fornece a equação e a representação gráfica dos pontos (dados experimentais) e da curva obtida através da equação. Além disso, para avaliar a qualidade dos resultados, ou seja, quão bem os dados experimentais se adaptam à curva, o programa fornece o Coeficiente de Determinação (R^2 , conforme Equação (1)), o qual considera as diferenças entre o valor calculado a partir da equação e os valores da temperatura obtidos no experimento, bem como as diferenças entre o valor calculado e a média das temperaturas do experimento (conforme Equações 2 e 3) (BARROSO; et al, 1987).

$$R^2 = 1 - \frac{SQE}{SQT} \quad (1)$$

Sendo R^2 o Coeficiente de Determinação, SQE a Soma dos Quadrados Explicada e SQT a Soma dos Quadrados Total, fornecidas pelas Equações (2) e (3):

$$SQE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 \quad (2)$$

Onde:

y_i : é o valor da temperatura obtida através do experimento;

\hat{y} : é o valor da temperatura calculado a partir da equação fornecida pelo programa.

$$SQT = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (3)$$

Onde:

y_i : é o valor da temperatura obtida através do experimento;

\bar{y} : é a média das temperaturas obtidas no experimento.

A partir da inserção dos dados e execução do programa em *Matlab*, tem-se as equações e curvas características de cada conjunto de dados (resfriamento da água nos quatro tipos de ampola). A seguir são apresentados os modelos matemáticos obtidos (equações 4, 5, 6, 7), o coeficiente de determinação (R^2) e o tempo de execução (t em segundos, que depende do número de parâmetros a ser estimado e da partição dos intervalos) do programa, relativos a cada conjunto de dados.

Ampola com vácuo e sem espelho

$$T = 26.3263 + 43.7437 e^{-0,00006006t} \quad (4)$$

$$R^2 = 99.99\%$$

$$t = 6789.3 \text{ s}$$

Ampola sem vácuo e sem espelho

$$T = 24.8749 + 45.5455e^{-0,00009009t} \quad (5)$$

$$R^2 = 99.98\%$$

$$t = 5937.9 \text{ s}$$

Ampola sem vácuo e espelhada

$$T = 24.4745 + 45.5455e^{-0,00006006t} \quad (6)$$

$$R^2 = 99.94\%$$

$$t = 6517.1 \text{ s}$$

Ampola com vácuo e espelhada

$$T = 21.3714 + 48.6486e^{-0,00001001t} \quad (7)$$

$$R^2 = 99.94\%$$

$$t = 6282.6 \text{ s}$$

4.2 Problema Direto: Lei de Resfriamento de Newton

A resolução pelo Problema Direto considerou a lei de variação de temperatura (resfriamento) de Newton, a qual afirma que a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente (BOYCE; DIPRIMA, 1994). Seja T a temperatura do corpo e T_m a temperatura do meio ambiente, então a taxa de variação da temperatura do corpo é $\frac{dT}{dt}$ e a lei de Newton relativa à variação de temperatura pode ser definida conforme a Equação (8).

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \quad (8)$$

Na equação, k é uma constante de proporcionalidade, a qual depende do material do qual é feito o corpo (depende de sua massa, calor específico, condutividade térmica, entre outras características). Se $k > 0$, torna-se necessário o sinal negativo na lei de Newton, a fim de a tornar negativa, pois trata-se de um processo de resfriamento, em que a temperatura do corpo vai diminuindo com o decorrer do tempo. A solução geral da Equação (8) pode ser obtida por Variáveis Separáveis (i.e. método de Separação de Variáveis), resultando na Equação (9):

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = \int -k dt$$

$$\ln(T - T_m) = -kt + C$$

$$e^{\ln(T-T_m)} = e^{-kt+C}$$

$$T - T_m = C \cdot e^{-kt} \quad (9)$$

Deste modo, utilizou-se a Equação (9) como método de resolução por Problema Direto para obter os parâmetros das equações características do resfriamento da água nos quatro tipos de ampola analisados. A seguir, são apresentadas as equações (10, 11, 12, 13) e os respectivos coeficientes de determinação (calculados pela Equação (1)) obtidos ao aplicar a Lei de Resfriamento de Newton.

Ampola com vácuo e sem espelho

$$T = 23 + 47e^{-0,00005348t} \quad (10)$$

$$R^2 = 99.90\%$$

Ampola sem vácuo e sem espelho

$$T = 23 + 47e^{-0,00008186t} \quad (11)$$

$$R^2 = 99.97\%$$

Ampola sem vácuo e espelhada

$$T = 23 + 47e^{-0,00005725t} \quad (12)$$

$$R^2 = 99.95\%$$

Ampola com vácuo e espelhada

$$T = 23 + 47e^{-0,00001021t} \quad (13)$$

$$R^2 = 99.86\%$$

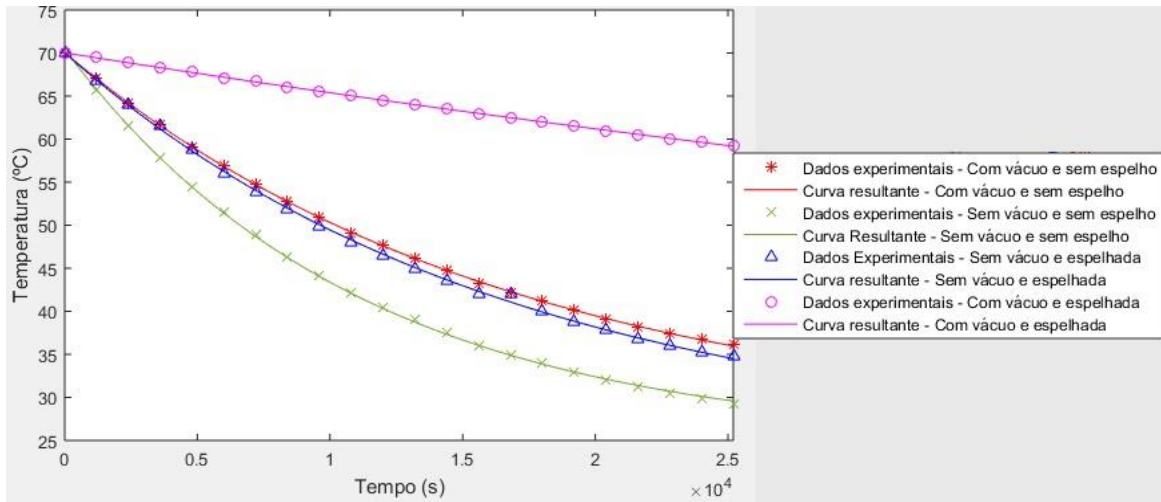
5. ANÁLISE COMPARATIVA DAS SOLUÇÕES POR PROBLEMA INVERSO E PROBLEMA DIRETO

A partir das soluções obtidas pelo Problema Direto - Lei de Resfriamento de Newton -, é possível validar os modelos matemáticos elaborados na resolução do Problema Inverso via método de Procura em Rede. Comparando as equações, bem como os coeficientes de determinação obtidos, observa-se que em todos os casos estes são coerentes com os dados experimentais.

Na Figura 5, é apresentado o gráfico dos dados experimentais e das curvas resultantes das equações obtidas como solução pelo Problema Inverso via método de Procura em Rede. Já a Figura 6, apresenta os dados

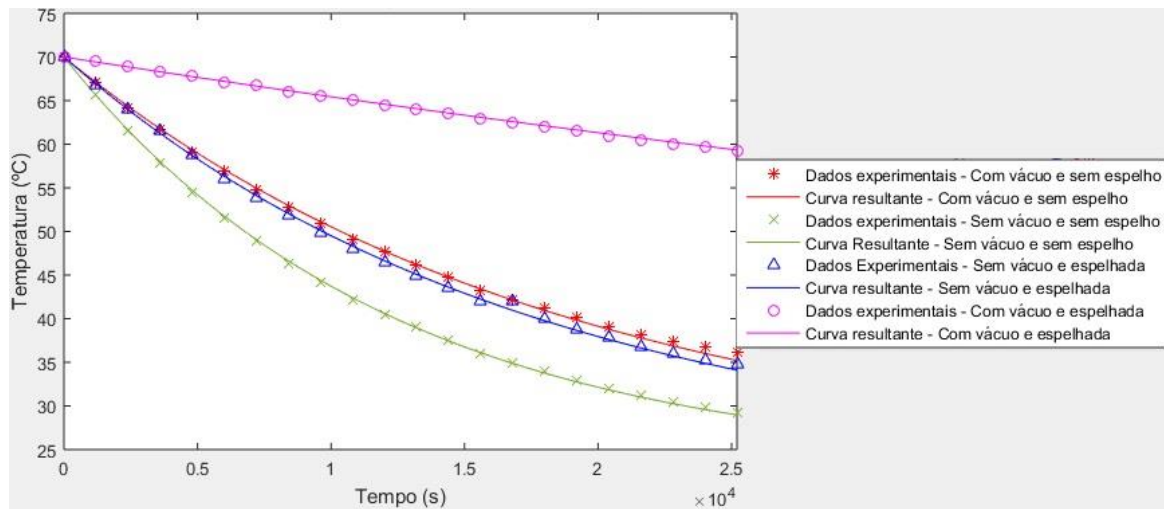
experimentais e as curvas características das equações elaboradas na resolução do Problema Direto, considerando a Lei de Resfriamento de Newton.

Figura 5 - Dados experimentais e curvas resultantes do resfriamento da água nas ampolas - Solução por Problema Inverso via método de Procura em Rede



Fonte: Produção da pesquisadora.

Figura 6 - Dados experimentais e curvas resultantes do resfriamento da água nas ampolas - Solução por Problema Direto via Lei de Resfriamento de Newton



Fonte: Produção da pesquisadora.

A partir das Figuras 5 e 6, é possível perceber que as curvas obtidas se ajustam e representam o comportamento dos dados experimentais. Além disso, as representações gráficas são muito semelhantes, o que permite verificar a proximidade das soluções encontradas pelo Problema Inverso e pela Lei de Resfriamento de Newton, validando a utilização do método de Procura em Rede na resolução deste problema. Somente ao analisar os coeficientes de

determinação nos dois casos é que se torna possível uma comparação mais precisa entre os dois métodos de resolução. Observando os coeficientes obtidos pelo Problema Inverso, é possível perceber que estes, na maioria dos casos, foram superiores em relação aos coeficientes encontrados na solução do Problema Direto, sendo que apenas para a ampola sem vácuo e espelhada, a solução pela Lei de Resfriamento de Newton apresentou coeficiente superior (99,95%, enquanto na solução via método de Procura em Rede este valor foi de 99,94%). Deste modo, a resolução do Problema Inverso se mostrou eficiente, pois os resultados ajustaram-se aos dados experimentais com erro menor do que na solução pelo Problema Direto.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A problemática envolvida neste trabalho é real e relacionada ao cotidiano dos indivíduos, bem como aos conceitos físicos da Termodinâmica. O questionamento *Qual tipo de ampola conserva a água quente por mais tempo?* pôde ser respondido a partir do experimento realizado, no qual também foi possível observar as propriedades físicas e as questões de transferência de calor apresentadas nas pesquisas bibliográficas. Deste modo, através dos experimentos, comprovou-se que a ampola com vácuo e espelhada conserva a água quente por mais tempo. Cabe salientar ainda a grande diferença no desempenho das ampolas quanto a conservação da temperatura da água, o que muitas vezes não é esclarecido pelas empresas que comercializam garrafas térmicas. No entanto, é necessário indicar a probabilidade da ocorrência de erros na realização destes experimentos, os quais se referem principalmente a erros de medição, devido à falta de uma precisão maior do instrumento utilizado (termômetro).

Para determinar a temperatura da água em um tempo definido e caracterizar o comportamento dos dados, buscou-se encontrar as curvas características dos mesmos, a partir do Problema Inverso via método de Procura em Rede. Os modelos matemáticos obtidos foram validados pela análise comparativa com os resultados fornecidos pela resolução via Problema Direto, para a qual foi considerada a Lei de Resfriamento de Newton. Como os

coeficientes de determinação calculados foram superiores a 99% em todos os casos, pode-se concluir que os métodos aplicados foram eficientes e que as equações obtidas caracterizam o processo de resfriamento da água nos diferentes tipos de ampolas de garrafas térmicas.

Neste contexto, cabe ressaltar que a implementação do método de Procura em Rede no *Matlab* foi necessária e fundamental para a resolução das situações, pois um processo de cálculo manual seria inviável. Sendo assim, devido a facilidade de sua compreensão e implementação computacional, bem como pelos ótimos valores obtidos para os coeficientes de determinação, o método de Procura em Rede é uma técnica de Problema Inverso eficiente, principalmente quando se deseja determinar até três parâmetros de uma função não tão complexa como a exponencial, que é o caso do trabalho realizado. No entanto, para situações em que é necessário determinar muitos parâmetros, a execução deste programa demanda muito tempo, por se tratar de um método exaustivo (o que pode ser evidenciado ao observar os tempos de simulação obtidos para os casos apresentados neste artigo).

REFERÊNCIAS

BARROSO, Leônidas Conceição; et al. **Cálculo numérico (com aplicações)**. 2. ed. São Paulo: HARBRA Ltda, 1987. 365 p.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de contorno**. 5. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1994. 531 p.

ENGL, Heinz Werner; HANKE, Martin; NEUBAUER, Andreas. **Regularization of Inverse Problems**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. 322 p.

HADAMARD, Jacques. **Lectures on the Cauchy problem in linear partial differential equations**. New Haven: Yale University Press, 1923. 338 p.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. 295 p.

IBARRA, Jose Ruben Morones. La materia a muy bajas temperaturas. **Revista Ingenierías**, v. 11, n. 38, p. 7–16, janeiro-março/2008.

INCROPERA, Frank P.; DEWITT, David P. **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. 6.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. 698 p.

MARQUES, Nelson L.R.; ARAÚJO, Ives S. Física térmica. In **Textos de apoio ao professor de Física**, UFRGS - Instituto de Física, Porto Alegre, v. 20, n. 5, 2009. 73 p.

SILVA, Bolivar Fernandes. Método da procura em rede melhorado: uma proposta para a estimação dos parâmetros do modelo de Rakhmatov e Vrudhula. **Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Unijuí**. Ijuí, Maio/2013. 64 p.

SILVA NETO, Antônio José da. Problemas inversos: aplicações em engenharia e medicina. In **Cápsulas de Ciência**. Quartet Editora, 2008, p. 57–86.

_____. Técnicas de inteligência computacional inspiradas na natureza: Aplicações em problemas inversos em transferência radiativa. In **Notas em Matemática Aplicada**, 2. ed. São Carlos: SBMAC, v. 41, 2012. 148 p.

_____; MOURA NETO, Francisco Duarte. **Problemas Inversos: Conceitos Fundamentais e Aplicações**. Rio de Janeiro: UERJ, 2005. 168 p.

VELHO, Haroldo Fraga de Campos. **Introdução aos problemas inversos: aplicações em pesquisa espacial**. Escola de Verão em Computação Aplicada-LAC-INPE. São José dos Campos, 2008. 25 p.