

# MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE MATERIAIS COMPÓSITOS REFORÇADOS COM PARTÍCULAS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

## *FINITE ELEMENT MODELING OF COMPOSITE MATERIALS REINFORCED WITH PARTICLES WITH FUNCTIONAL GRADATION*

Adriana Amaro Diacenco<sup>1</sup> 

Renato Pavanello<sup>2</sup> 

**Resumo:** Este artigo trata-se da modelagem por elementos finitos de materiais compósitos que apresentam gradação funcional com o objetivo de propor por meio da combinação da Teoria da Homogeneização com a Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT) um modelo de analítico para a representação de compósitos reforçados com fibras que apresentam a gradação funcional. Para tanto, é utilizada a Regra da Potência para a representação da distribuição da fase reforço do material compósito em combinação com a Regra de Mori-Tanaka para a obtenção de seus valores médios (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e densidade). A modelagem é realizada utilizando o elemento finito Serendipity juntamente com a Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem. Foram realizadas simulações numéricas a fim de determinar as frequências naturais do modelo formulado e implementado, sendo o resultado comparado com dados da literatura, tornando possível avaliar e ilustrar as características de desempenho da formulação utilizada nos procedimentos de modelagem de materiais compósitos reforçados com partículas.

**Palavras-chave:** Compósitos. Gradação Funcional. Modelagem.

**Abstract:** This work present the finite element modeling of composite materials that have a functional gradation. It was used The Mori Tanaka Homogenization combined with the First-order Shear Deformation Theory to obtain their average values (modulus of elasticity, Poisson's ratio and density). The modeling was performed using the rectangular Serendipity element composed by eight nodes and five degrees of freedom per node. Numerical simulations are performed to determine their modal parameters such as natural frequencies, the result being compared with data from the literature, making it possible to evaluate and illustrate the performance characteristics of the formulation used in the modeling procedures of composite materials reinforced with particles.

**Keywords:** Composites. Functional gradation. Modeling.

---

<sup>1</sup> Doutora em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI,

adriana\_aadiacenco@yahoo.com.br.

<sup>2</sup> Doutor em Engenharia Mecânica, Docente da Universidade Estadual de Campinas -

UNICAMP

# 1 INTRODUÇÃO

Materiais com gradação funcional (functionally graded materials – FGM) apresentam um gradiente de composição ao longo de distâncias microscópicas ou macroscópicas que são fabricados dependendo das necessidades de projetos. O estudo destes tipos de materiais teve início na década de 70, por meio dos materiais compósitos, pois estes materiais podem apresentar gradientes de composição e estrutura e, com isto é possível controlar suas propriedades por meio destes gradientes (UEHARA, 2015).

Estes materiais vêm sendo investigados por muitos pesquisadores como Bose (2021) e Pankaj (2020), por ser uma classe de materiais relativamente nova e, podem ser entendidos, também, como sendo materiais em que as suas propriedades (mecânicas, térmicas e/ou químicas) variam de acordo com a geometria do material.

A gradação funcional é o modo como os constituintes de determinado material estão distribuídos, esta distribuição pode ser considerada nos três eixos (x, y, z) ou para um determinado eixo específico. Para o caso de materiais compósitos que apresentam a gradação funcional é mais usual a construção do material de forma que as partículas variem ao longo da coordenada da espessura, uma vez que, materiais fabricados dessa forma apresentam menos chances de delaminação (DAMASIO, 2015).

O comportamento mecânico de materiais compósitos vem sendo amplamente analisado, em virtude de esses materiais apresentarem propriedades superiores se comparado a materiais de uso tradicional (como aços, alumínio, concreto, madeira, dentre outros), mediante a isto, esses materiais têm sido aplicados a diversos setores de engenharia (aeroespacial, automobilístico, naval, civil, etc.) (DIACENCO; LIMA; CORRÊA, 2012).

Para materiais compósitos torna-se extremamente relevante a forma como as fases estão distribuídas e como elas interagem entre si, além da geometria dos agentes de reforço. Para tanto, se faz necessário à utilização de uma teoria que represente o comportamento da distribuição de partículas e sua

relação com o comportamento global do material. Neste trabalho é proposta uma formulação matemática e numérica para representação do comportamento mecânico de materiais compósitos reforçados com partículas que apresentam gradação funcional.

## 2 FORMULAÇÃO DO MODELO

A Figura 1 apresenta uma ilustração esquemática da distribuição de dois materiais (A e B) em relação à espessura do compósito do tipo FGM.

**Figura 1** – Ilustração esquemática de um compósito do tipo FGM.



Fonte: Adaptado de Damasio (2015).

Inicialmente, para representar o comportamento do material compósito FGM é necessário ter uma função que represente a distribuição de partículas ao longo de uma direção coordenada. Além da escolha da função que represente a distribuição de partículas, é necessário a escolha de uma Teoria da Homogeneização, como a Regra de Mori-Tanaka, responsável pela análise micromecânica e que permite a determinação das propriedades do material compósito utilizando as propriedades dos seus constituintes, arranjo e quantidade relativa de cada um deles. O processo de homogeneização de um material compósito reforçado com partículas requer a análise das propriedades elásticas (LEKHNITSKII, 1981).

Esta distribuição pode ser representada pela regra da potência e é dada por Eq. 1 (FERREIRA, 2005).

$$V_c(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p \quad (1)$$

Sendo que  $V_c(z)$  é a distribuição de volume relacionadas às partículas;  $z$  é a coordenada da espessura;  $h$  é a espessura do laminado e  $p$  é o parâmetro que define o perfil da variação de volume de partículas ao longo da espessura.

A Eq.1 pode ser combinada com a Regra de Mori Tanaka e nesta regra os módulos de compressão volumétrica (da fase matriz ( $K_m$ ) e das fibras ( $K_c$ )) e os módulos de distorção (fase matriz ( $G_m$ ) e das fibras ( $G_c$ )) são expressos por (Eq. 2) (MORI; TANAKA, 1973).

$$K_m = \frac{E_m}{3(1-2\nu_m)} \quad K_c = \frac{E_c}{3(1-2\nu_c)} \quad G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \quad G_c = \frac{E_c}{2(1+\nu_c)} \quad (2)$$

Sendo:  $E_m$  e  $E_c$  são os módulos de elasticidade da fase matriz e fibra,  $\nu_m$  e  $\nu_c$  são as frações volumétricas da fase matriz e fibra, respectivamente.

Os módulos de compressão volumétrica e distorção podem ser relacionados por (Eq. 3):

$$\frac{K_{eq}-K_m}{K_c-K_m} = \frac{V_c(z)}{1+V_m(z)\left(\frac{K_c-K_m}{K_m-\frac{4}{3}G_m}\right)} \quad \frac{G_{eq}-G_m}{G_c-G_m} = \frac{V_c(z)}{1+V_m(z)\left(\frac{G_c-G_m}{G_m-f_1}\right)} \quad (3)$$

Sendo  $f_1$  expresso por:

$$f_1 = \frac{G_m(9K_m+8G_m)}{6(K_m+2G_m)} \quad (3.1)$$

Obtendo as distribuições ao longo da espessura dos módulos de compressão volumétrica e de corte expressas pela equação 4.

$$K_{eq}(z) = \frac{4G_m K_m + 3K_m K_c - 4G_m K_m V_c(z) + 4G_m K_c V_c(z)}{4G_m + 3K_c - 3K_m V_c(z) - 3K_c V_c(z)}$$

$$G_{eq}(z) = \frac{G_m f_1 + G_m G_c - G_m V_c(z) f_1 + G_c V_c(z) f_1}{G_c + f_1 + G_m V_c(z) - G_c V_c(z)} \quad (4)$$

E pela Regra de Mori-Tanaka tem-se que a aproximação do módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e densidade ao longo da espessura são dados pelas Equações (5).

$$E(z) = \frac{9K_{eq}(z)G_{eq}(z)}{3K_{eq}(z)+G_{eq}(z)} \quad \nu(z) = \frac{3K_{eq}(z)-2G_{eq}(z)}{2(3K_{eq}(z)+G_{eq}(z))} \quad \rho(z) = V_c(z)\rho_c + (1 - V_c(z))\rho_m \quad (5)$$

## 2.1 Formulação por elementos finitos utilizando a FSDT

A Teoria FSDT utiliza cinco graus de liberdade por nó (g.d.l's) para a representação do campo de deslocamentos mecânicos, os quais de acordo com Reddy (1997) são expressos por (Eq.6):

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + z\psi_x(x,y,t)$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) + z\psi_y(x,y,t) \quad (6)$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t)$$

sendo  $\psi_x$  e  $\psi_y$  as rotações dos segmentos normais à superfície de referência em torno dos eixos  $y$  e  $x$  respectivamente.

Para fins de implementação numérica recomenda-se reescrever a Equação (6) de maneira matricial como mostrado na Equação (7).

$$U(x, y, z, t) = A(z)u(x, y, t) \quad (7)$$

A Equação (8) pode ser ainda reescrita conforme a Equação (8.1).

$$U(x, y, z, t) = [u(x, y, z, t) \ v(x, y, z, t) \ w(x, y, z, t)]^T \quad (8.1a)$$

$$A(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.1b)$$

$$u(x, y, t) = [u_0(x, y, t) \ v_0(x, y, t) \ w_0(x, y, t) \ \psi_x(x, y, t) \ \psi_y(x, y, t)]^T \quad (8.1c)$$

Existe como relacionar os deslocamentos e deformações utilizando a Teoria da Elasticidade Linear que afirma que as deformações mecânicas são definidas em termos de formas diferenciais dos deslocamentos mecânicos, tal qual mostra a Equação (9) (REDDY, 1997).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (9)$$

Após a substituição de cada linha da Equação (6) nas Equações (9), obtém-se:

$$\varepsilon_b(x, y, z, t) = [D_{b0} + zD_{b1}]u(x, y, t) = D_b(z)u(x, y, t) \quad (10)$$

$$\varepsilon_s(x, y, z, t) = [D_{s0}]u(x, y, t) = D_s u(x, y, t) \quad (11)$$

Sendo  $\varepsilon_b$  e  $\varepsilon_s$  a representação para as deformações de membrana e cisalhamento e  $D_i (i = 0, \dots, 2)$  são matrizes formadas por operadores diferenciais, conforme é apresentado em (12).

(12a)

$$D_b = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) & 0 & z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) & z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{bmatrix}$$

(12b)

$$D_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O elemento *Serendipity* é um elemento retangular de placa que apresenta três nós por aresta, perfazendo um total de oito nós (REDDY, 1997). Existem relações entre as coordenadas globais e locais das pelas Equações 16 (Eq. 13a, Eq. 13b, Eq. 13c e Eq. 13d). E neste trabalho será utilizado elemento finito do tipo *Serendipity* que se justifica devido ao fato de que ele apresenta um bom desempenho na modelagem de materiais compósitos e de estruturas inteligentes, conforme demonstrado nos trabalhos de Reddy (1997):

$$\xi = \frac{2x - x_8 - x_4}{x_8 - x_4} \quad (13a)$$

$$x = \frac{1}{2} [\xi(x_8 - x_4) + x_4 + x_8] \quad (13b)$$

$$\eta = \frac{2y - y_6 - y_2}{y_6 - y_2} \quad (13c)$$

$$y = \frac{1}{2} [\eta(y_6 - y_2) + y_6 + y_2] \quad (13d)$$

A matriz que relaciona a derivada das funções de forma com relação às coordenadas globais com a derivada das funções de forma com relação às

coordenadas locais é expressa conforme a Equação (14). A partir dessa matriz define-se o Jacobino representado pela Equação (15).

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (x_8 - x_4) & 0 \\ 0 & (y_6 - y_2) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{(y_6 - y_2)(x_8 - x_4)}{4} \quad (15)$$

As funções de forma para o elemento finito do tipo *Serendipity* são expressas por:

$$N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \xi)(1 - \xi + \eta)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \eta)$$

$$N_5(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi + \eta)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_7(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta)$$

(16)

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \eta)$$

As variáveis mecânicas apresentadas nas Equações (7), (9) e (10) são convertidas para a formulação em elementos finitos usando as funções de forma do elemento finito *Serendipity* (Equações (16)) (DIACENCO; LIMA; CORRÊA, 2012). Conforme é representado pelas Eqs 17.

$$U(x, y, z, t) = A(z)N(\xi, \eta)u(t) \quad (17a)$$

$$\varepsilon_b(x, y, z, t) = D_b(z)N(\xi, \eta)u(t) = B_b(\xi, \eta, z)u(t) \quad (17b)$$

$$\varepsilon_s(x, y, z, t) = D_s N(\xi, \eta)u(t) = B_s N(\xi, \eta)u(t) \quad (17c)$$

Por meio das interpolações dos campos de deslocamentos e deformações, as expressões das energias cinéticas e deformação podem ser formuladas, respectivamente, como segue: (Eq. 18 e Eq. 19) (ZIENKIEWICZ, 2000).

$$\mathbf{K}_E(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T(t) \mathbf{M}^{(e)} \dot{\mathbf{u}}(t) \quad (18)$$

$$\mathbf{S}_E(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}(t) \quad (19)$$

Sendo:  $\mathbf{M}^{(e)}$  é a matriz elementar de massa e  $\mathbf{K}^{(e)}$  é a matriz elementar de rigidez, a qual foi separada em efeito de flexão-membrana e cisalhamento,  $\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_b^{(e)} + \mathbf{K}_s^{(e)}$  e são expressas, respectivamente, como mostra as equações 20, 21 e 22:

(20)

$$M^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \rho_k N^T(\xi, \eta) A^T(z) A(z) N(\xi, \eta) \det(J) d\eta d\xi dz$$

$$K_b^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} B_b^T(\xi, \eta, z) C_b^k B_b(\xi, \eta, z) \det(J) d\eta d\xi dz \quad (21)$$

$$K_s^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} B_s^T(\xi, \eta, z) C_s^k B_s(\xi, \eta, z) \det(J) d\eta d\xi dz \quad (22)$$

Sendo que:  $\rho$  é a densidade,  $N^T(\xi, \eta)$  é a matriz transposta das funções de forma do elemento *Serendipity*,  $A^T$  é a matriz transposta da matriz  $A$ , expressa na Equação (8),  $N(\xi, \eta)$  é a matriz das funções de forma,  $B_b^T$  e  $B_s^T$  são as matrizes transpostas dos operadores, respectivamente, aplicados as funções de forma do elemento *Serendipity* em coordenadas locais,  $B_b$  e  $B_s$  são as matrizes dos operadores em coordenadas locais e  $C$  é a matriz dos coeficientes elásticos para um material ortotrópico para os efeitos de flexão-membrana e cisalhamento, mostrado nas Equações 21 e 22.

Aplica-se a conectividade dos nós para a obtenção das matrizes globais e usando procedimentos padrões de montagem por elementos finitos tem-se equação global do movimento no domínio do tempo é escrita conforme a Equação (23) (HUEBNER, 1982)

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = f(t) \quad (23)$$

Sendo  $M = \bigcup_{e=1}^{nelem} M^{(e)}$  e  $K = \bigcup_{e=1}^{nelem} K^{(e)}$  as matrizes de rigidez global e de massa. O símbolo  $\bigcup$  indica a matriz de montagem,  $q(t)$  é o vetor de deslocamento global e  $f(t)$  é o vetor de cargas generalizadas.

Para a condição de vibração livre e de modo a obter a Equação (23) no domínio da frequência, têm-se as seguintes considerações (Equação 24):

$$\{q(t)\} = \{Q\} e^{i\omega t} \quad (24)$$

Derivando, duas vezes, a Equação (24) em função do tempo é possível obter a Equação (25).

$$\{\ddot{q}(t)\} = -\omega^2 \{Q\} e^{i\omega t} \quad (25)$$

Substituindo as Equações (24) e (25) na Equação (26), tem-se a Equação (26)

$$(K - \omega^2)\{Q\} = 0 \quad (26)$$

Sendo  $\omega$  são os autovalores que representam o quadrado das frequências naturais e  $\{Q\}$  são os autovetores que representam os correspondentes deslocamentos dos seus respectivos modos.

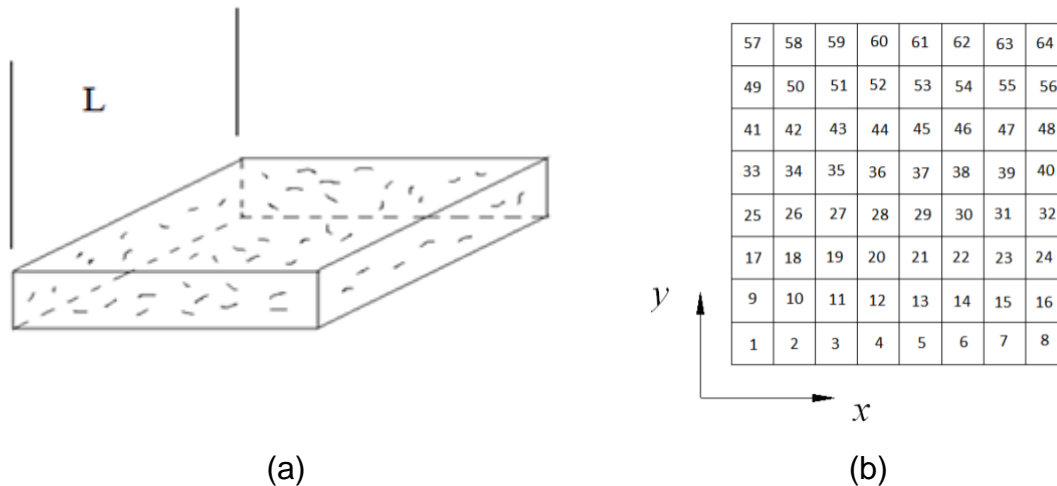
### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho utilizou como metodologia de pesquisa a simulação computacional. Inicialmente foram utilizadas teorias analíticas como a Teoria da Homogeneização em combinação com a Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT) com o objetivo de se obter a representação analítica do material compósito. Para a realização modelagem da estrutura foi empregado o Método de Elementos Finitos em combinação com a representação analítica realizada. Seguidamente, o modelo formulado foi implementado em ambiente de programação MatLab®.

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para a análise do desempenho da metodologia proposta no presente trabalho foi considerado um material compósito com gradação funcional que apresenta a geometria de uma placa plana quadrada formada por uma matriz metálica constituída de alumínio reforçada com partículas de óxido de alumínio, conforme ilustra a Figura 2 (a) apresentando razão comprimento (L) e espessura (h) de 5. A Figura 2(b) mostra a discretização do modelo de elementos finitos composto por 64 (8x8) elementos de placa plana.

Figura 2 – (a) Placa compósita; (b) Discretização da placa.



Fonte: Dos autores (2021).

Os valores das propriedades do material desta camada compósita são fornecidos nas referências de Damásio (2015) e estão apresentados na Tabela 1.

**Tabela 1** – Propriedades da placa compósita reforçada com partículas

Propriedades dos materiais	Valores
$E_{AL}$ (GPa)	70
$V_{AL}$	0,30
$\rho_{AL}$ (kg/m <sup>3</sup> )	2707
$E_{AL2O3}$ (GPa)	380
$V_{AL2O3}$	0,30
$\rho_{AL2O3}$ (kg/m <sup>3</sup> )	3800

Fonte: Dos autores (2021).

As frequências naturais obtidas do modelo proposto e implementado estão apresentadas na Tabela 2 para diferentes valores de distribuição de partículas (parâmetro p).

**Tabela 2** – Valores das frequências naturais obtidos

Valores de p	p=0	p=0.5	p=1	p=4
Frequências naturais	2,110	1,804	1,628	1,388

Fonte: Dos autores (2021).

Observa-se que os valores de frequências naturais decrescem à medida que a distribuição de partículas aumenta.

A validação do modelo foi realizada comparando-se os valores da primeira frequência natural obtida para diferentes valores de distribuição de partículas (p) deste trabalho com os resultados apresentados nos trabalhos de Damásio (2015) e Loc Tran, Ferreira e Nguyen-Xuan (2013). As propriedades do material foram às mesmas apresentadas na Tabela 1, com exceção da malha de elementos finitos, a qual foi considerada 20x20, para fins de comparação e validação, pois os autores Damásio (2015) e Loc Tran, Ferreira e Nguyen-Xuan (2013) utilizaram esta discretização em seus modelos.

A Tabela 3 apresenta os valores da primeira frequência natural considerando diferentes valores de  $p$  e para uma discretização de malha de elementos finitos de  $20 \times 20$ .

**Tabela 3** – Validação da frequência natural

Modelo	$p=0$	$p=0.5$	$p=1$	$p=4$
Damásio (2015)	2,117	1,803	1,631	1,383
TRAN, FERREIRA, NGUYEN-XUAN (2013)	2,112	1,805	1,624	1,397
<b>Modelo Implementado</b>	2,113	1,799	1,635	1,393

Fonte: Dos autores (2021).

Comparando-se a Tabela 2 com a Tabela 3, pode-se notar qualitativamente que, houve uma pequena variação dos valores da frequência natural em relação à discretização da malha de elementos finitos.

A Tabela 4 apresenta as primeiras cinco frequências naturais obtidas a partir do modelo formulado e implementado. Nota-se, qualitativamente que, há um mesmo padrão para as outras frequências naturais em relação ao parâmetro  $p$ , isto é, os valores de frequências diminuem à medida que  $p$  aumenta.

**Tabela 4** – Valores das primeiras cinco frequências naturais

Frequências Naturais				
Valores de $p$	$p=0$	$p=0.5$	$p=1$	$p=4$
1 <sup>a</sup>	2,110	1,804	1,628	1,388
2 <sup>a</sup>	3,897	3,612	3,448	3,201
3 <sup>a</sup>	3,897	3,619	3,451	3,201
4 <sup>a</sup>	4,623	4,397	4,153	3,929
5 <sup>a</sup>	4,623	4,403	4,155	3,935

Fonte: Dos autores (2021).

## 5 CONCLUSÃO

Foi possível propor por meio da combinação da Teoria da Homogeneização com a Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT) um modelo de analítico para a representação de compósitos reforçados

com fibras que apresentam a gradação funcional. A partir do modelo proposto foi realizada a implementação numérica com o objetivo de realizar a análise modal, por meio da obtenção das frequências naturais do modelo, sendo possível afirmar valores de frequências naturais decrescem à medida que a distribuição de partículas aumenta. Os resultados foram validados por meio de dados publicados na literatura.

## REFERÊNCIAS

BOSE T., *et al* Study of thermal gradation on creep deformation of non-linear varying functionally graded rotating disc, **IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.**, 2021.

DAMÁSIO, F. R. **Influência da Variabilidade dos Materiais Compósitos na Resposta Dinâmica de Estruturas Laminadas**. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, 2015.

DIACENCO, A. A.; LIMA, A. M. G. ; CORRÊA, E. O. Finite element reduction strategy for composite sandwich plates with viscoelastic layers. **Materials Research** (São Carlos. Impresso), v. 15, p. 1-8, 2012.

FERREIRA, A. J. M., et al. Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method, **Composite Structures** v.69, p.449–457, 2005.

HUEBNER K.H., THORNTON EA. **The Finite Element Method for Engineers**. New York: John Wiley & Sons; 1982.

LEKHNITSKII, J. Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Moscow, **Mair. Pleblishers**, 1981.

MORI, T. AND TANAKA, K.: 1973, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, **Acta Metallurgica** v.21, n.5, p.571–574.

PANKAJ S. G. et al., On the numerical modelling and analysis of multi-directional functionally graded composite structures: A review, **Composite Structures**, v. 236, 2020.

REDDY J.N. **Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis**. 2nd ed. CRC Press; 1997.

TRAN, L. V.; FERREIRA, A. J. M; NGUYEN-XUAN H., Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory, **Composites B**, v. 51, p. 368–383, 2013.

UEHARA, J. L. H. S. **Estudo de materiais com gradiente funcional (MGF) a base de alumina ( $Al_2O_3$ ) e carbetto de nióbio (NbC) obtidos por diferentes técnicas de sinterização**. Dissertação (Mestrado) Escola de Engenharia de São Carlos, 2015.

ZIENKIEWICZ, O. C; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method** – v. 1: The Basis, Quinta Edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Massachusetts, 2000.

**Enviado em:** 13 mai. 2021.

**Aceito em:** 27 nov. 2021.

**Editor responsável:** Mateus das Neves Gomes.