PA de Segunda Ordem : A Hiper-PA

Leonardo Gonçalves Rimsa
CEFET-MG – Campus Contagem
leorimsa@cefetmg.br

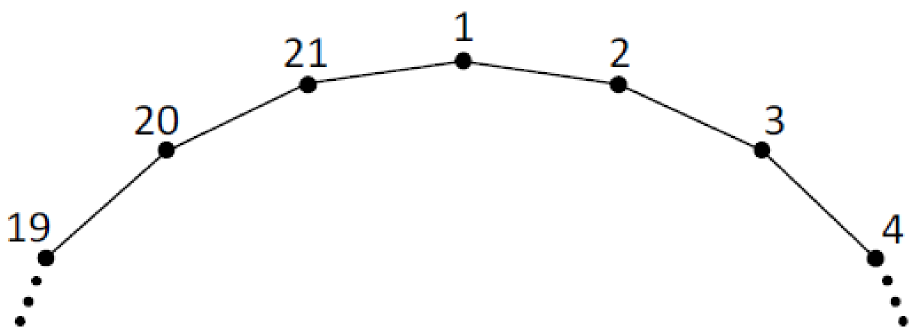
RESUMO: Neste artigo, tendo como motivação uma questão da Olimpíada de Matemática das Instituições Federais do ano de 2021, estudaremos uma sequência especial, não trabalhada na educação básica, mas de suma importância, cada vez mais expressivamente cobrada em olimpíadas de Matemática : a PA de segunda ordem. Olimpíadas brasileiras como a OMIF e a OBMEP têm cobrado questões referentes a ela, como será exemplificado. Além disso, veremos que sua fórmula é consequência natural da fórmula da soma dos termos de uma PA finita. Logo, sua abordagem no ensino médio se justifica como aplicação direta de temas desse nível de ensino.

Palavras-chave: Sequência numérica; fórmula geral; PA de segunda ordem.

ENUNCIADO

(Questão 13 – OMIF – 2021 – primeira fase)

Uma aranha se desloca sobre as arestas de um hendecoságono regular (polígono de 21 lados) cujos vértices estão numerados de 1 a 21 em ordem crescente e em sentido horário. A figura abaixo ilustra parte do polígono citado.



A aranha caminha sobre o hendecoságono no sentido horário e seu ponto de partida é o vértice de número 1. No primeiro dia, ela percorre 1 aresta do polígono, chegando ao vértice 2. No segundo dia, ela percorre 3 arestas, parando no vértice 5. No terceiro dia, ela percorre 5 arestas, chegando ao vértice 10. E assim, sucessivamente, a aranha faz seu trajeto, sempre percorrendo, em cada dia, duas arestas a mais do que percorreu no dia anterior. Se a aranha iniciou este processo no dia primeiro de janeiro de 2021, em que vértice ela se encontrará ao final do dia 19 de setembro do mesmo ano?

a) 1
b) 5
c) 10
d) 16
e) 17

RESOLUÇÃO:

Para analisar a questão, vamos escrever a sequência composta pelos vértices em que a aranha para ao final de cada dia. Ao final do primeiro dia, ela para no vértice 2. Ao final do segundo dia, no vértice 5. Ao final do terceiro, no 10. É claro que esta sequência é cíclica, pois sabemos que o polígono tem 21 vértices e os valores vão começar a se repetir depois de alguns dias. Mas, para esta análise inicial, consideremos que a sequência formada pode assumir valores tão grandes quanto se queira. Ao final do problema, faremos os ajustes necessários à situação descrita. Logo, a sequência numérica formada é : $(2,5,10,17,26,37,50,65,\ldots)$.

Observe que esta sequência NÃO é uma progressão aritmética (PA). Mas ela é formada de uma forma bastante interessante : toma-se um termo inicial ($a_1=2$) e, a partir daí, obtém-se cada termo seguinte somando-se o anterior aos termos da PA : $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (3,5,7,9,11,13,15,\ldots)$. Assim, temos :

$$a_1=2$$

$$a_2=a_1+b_1=2+3=5$$

$$a_3=a_2+b_2=5+5=10$$

$$a_4=a_3+b_3=10+7=17$$

E, em geral : $a_n=a_{n-1}+b_{n-1}$.

Algumas vezes já trabalhei com os estudantes sequências dessa natureza, em sala de aula. Elas aparecem, com alguma frequência, em questões olímpicas. A literatura matemática dá a elas o nome de **PA de segunda ordem**. Encontramos essa nomenclatura, por exemplo, na obra *A Matemática do Ensino Médio – Volume 1*, referenciada ao fim do texto. No entanto, gosto de chamá-las de **HIPER-PA**. O prefixo ***hiper*** vem do grego e significa algo como *acima* ou *além de* (site Wikipédia). Desse modo, Hiper-PA seria algo "além da PA", o que daria idéia de alguma coisa que decorre da PA ou que "vem depois" da PA. É importante frisar com os alunos que o termo da literatura é PA de segunda ordem. Porém, feito isso, acostumei-me a chama-la, com meus estudantes, de HIPER-PA. Desperta maior interesse e "aguça" a curiosidade deles, segundo minha experiência.

Portanto, HIPER-PA é a sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é o anterior somado aos termos de uma PA específica (em ordem). Equivalentemente, podemos dizer que uma sequência é uma HIPER-PA quando a sequência formada pela diferença entre cada termo e seu antecessor é uma PA. Quer dizer, é possível provar que $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma HIPER-PA se, e somente se, $(a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots, a_n - a_{n-1}, \ldots)$ for uma PA.

O grande interesse aqui é obter a fórmula geral de uma hiper-PA, ou seja, uma fórmula que nos permita calcular um termo qualquer dela, sabendo alguns parâmetros e a posição dele.

Consideremos, então, um termo inicial $a_1 \in R$ e uma dada progressão aritmética (PA) de termos $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots)$. Formemos, então, a hiper-PA dada pela fórmula de recorrência : $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Desse modo, temos :

$$a_2 = a_1 + b_1$$

$$a_3 = a_2 + b_2 = a_1 + b_1 + b_2$$

$$a_4 = a_3 + b_3 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3$$

E, por este raciocínio : $a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1})$ ou $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i$.

Mas o que está dentro dos parênteses é a soma dos $n-1$ primeiros termos da PA $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$ o que sabemos ser dado por : $S_{n-1} = \dfrac{(b_1 + b_{n-1})(n-1)}{2}$.

Logo, temos :

$$a_n = a_1 + \frac{(b_1 + b_{n-1})(n-1)}{2}$$

Mas, pela fórmula geral da PA, temos : $b_{n-1} = b_1 + (n-2) r$. Assim :

$$a_n = a_1 + \frac{(b_1 + b_1 + (n-2) r)(n-1)}{2}$$

$$a_n = a_1 + \frac{(2 b_1 + rn - 2 r)(n-1)}{2} = \frac{2 a_1 + 2 b_1 n - 2 b_1 + r n^2 - rn - 2 rn + 2 r}{2}$$

$$a_n = \frac{r n^2 + (2 b_1 - 3 r) n + 2 (a_1 - b_1 + r)}{2}$$

Nessa fórmula, observemos que a_1 é o primeiro termo da hiper-PA, b_1 é o primeiro termo da PA que “auxiliou” a formação, podendo ser obtido por :

$$b_1=a_1+b_1-a_1=a_2-a_1$$

Já o parâmetro r é a razão da PA que auxiliou a formação da hiper-PA, podendo ser calculado por :

$$r=b_2-b_1=(a_1+b_1+b_2-a_1-b_1)-(a_1+b_1-a_1)$$

$$r=(a_3-a_2)-(a_2-a_1)$$

$$r=a_3-2a_2+a_1$$

Para facilitar, chamemos de $u, v\, e\, w$ os coeficientes da fórmula geral encontrada para a_n. Desse modo, temos :

$$u=r=a_1-2a_2+a_3$$

$$v=2b_1-3r=2(a_2-a_1)-3(a_1-2a_2+a_3)=-5a_1+8a_2-3a_3$$

$$w=2(a_1-b_1+r)=6a_1-6a_2+2a_3$$

Assim, temos que a fórmula geral de uma hiper-PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é dada por :

$$a_n=\frac{un^2+vn+w}{2}$$

onde $n \in \mathbb{N}^*$, $u=a_1-2a_2+a_3$, $v=-5a_1+8a_2-3a_3$ e $w=6a_1-6a_2+2a_3$.

Voltemos, agora, à sequência dada pelo problema da OMIF, motivador desta discussão : $(2,5,10,17,26,37,50,65,\ldots)$. Já vimos que se trata de uma hiper-PA. De acordo com o deduzido, temos que seus parâmetros são :

$$u=a_1-2a_2+a_3=2-2\times 5+10=2-10+10=2$$

$$v=-5a_1+8a_2-3a_3=-5\times 2+8\times 5-3\times 10=-10+40-30=0$$

$$w=6a_1-6a_2+2a_3=6\times 2-6\times 5+2\times 10=12-30+20=2$$

E sua fórmula geral é : $a_n=\dfrac{2n^2+2}{2}\Longrightarrow a_n=n^2+1$, com $n\in\mathbb{N}^*$. Substitua o n pelos primeiros naturais e verifique que, realmente, a fórmula "gera" os termos da sequência.

Voltando agora à situação descrita no problema, temos que, se a aranha começou o processo em primeiro de janeiro de 2021, então ao fim do dia 19 de setembro, passaram-se 262 dias. O termo correspondente da sequência seria : $a_{262}=262^2+1=68645$. Como o "ciclo" é de 21 (número de vértices do polígono), devemos dividir o número obtido por 21 : $68645=3268\times 21+17$. Isso mostra que a aranha dará 3268 voltas em torno do polígono e parará no vértice 17, o que nos dá como resposta a letra E.

É claro que, talvez, existam formas menos "trabalhosas" de se resolver a questão da OMIF. Mas, aqui, o interesse maior foi apresentar este novo tipo de sequência e deduzir sua fórmula geral.

Para fixar o que foi aprendido, vamos achar a fórmula geral de uma outra hiper-PA : $(4,2,3,7,14,24,37,53,\ldots)$. Observe que a sequência é, realmente, uma hiper-PA, pois é obtida começando-se de $a_1=4$ e somando-se, ordenadamente, os termos da PA : $(-2,1,4,7,10,13,16,\ldots)$. Faça a verificação ou perceba, equivalentemente, que a sequência $(2-4,3-2,7-3,14-7,24-14,37-24,\ldots)=(-2,1,4,7,10,13,\ldots)$ é uma PA. Os parâmetros desta hiper-PA são :

$$u=4-2\times 2+3=3\,,v=-5\times 4+8\times 2-3\times 3=-13\,e\,w=6\times 4-6\times 2+2\times 3=18$$

E sua fórmula geral é : $a_n=\dfrac{3n^2-13n+18}{2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Observemos também a sequência : $(-1,2,9,20,35,54,77,104,\ldots)$. É possível ver que :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} -1 & & 2 & & 9 & & 20 & & 35 & & 54 & & 77 & & 104 \\ & +3 & & +7 & & +11 & & +15 & & +19 & & +23 & & +27 & \end{array}$$

É uma hiper-PA, com $u=4\,,v=-6\,e\,w=0$ (faça os cálculos). Sua fórmula geral é :

$$a_n=\frac{4n^2-6n}{2}\Longrightarrow a_n=2n^2-3n,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Nas duas sequências analisadas, substitua o n por alguns valores e convença-se da veracidade da fórmula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A hiper-PA, como vimos, é uma sequência numérica que não consta dos currículos de Matemática do ensino médio brasileiro. Porém, o seu estudo e a dedução de sua fórmula geral são perfeitamente acessíveis a um estudante desse nível de ensino. O contato com ela oferece várias vantagens. Permite uma aprendizagem complementar àqueles que gostam de Matemática e se interessam por seus temas. A dedução da fórmula permite fixar conceitos da própria PA e utilizar a fórmula da soma dos termos de uma PA finita. Vários exemplos de problemas envolvendo hiper-PA podem ser encontrados em provas de olimpíadas de Matemática. Apenas a título de exemplificação, podemos indicar questões da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) e da OMIF (Olimpíada de Matemática das Instituições Federais) que trabalham este tipo de sequência. Elas podem ser encontradas facilmente nos sites oficiais dessas competições, indicados nas referências bibliográficas. Da prova da OBMEP (primeira fase – nível 3), temos : 2007 – questão 17, 2012 – questão 2, 2015 – questões 3 e 14.

Já da OMIF (primeira fase), podemos citar : 2022 – questão 6 e a que foi resolvida neste texto. Este material pretende, desse modo, servir de apoio ao professor que queira introduzir este tema ou ao aluno que pretenda aprofundar seus conhecimentos.

REFERÊNCIAS

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio. Volume 1.* Coleção do Professor de Matemática. SBM. Nona Edição, Rio de Janeiro, 2006.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio. Volume 2.* Coleção do Professor de Matemática. SBM. Sexta Edição, Rio de Janeiro, 2006.

RIMSA, Leonardo Gonçalves. *Matemática Financeira Concisa.* Ius Editora. Primeira Edição, Belo Horizonte, 2010.

Olimpíada de Matemática das Instituições Federais. *Prova da OMIF 2021*. Disponível em : www.omif.com.br/estudo. Acesso em : 15/06/2023.

Olimpíada de Matemática das Instituições Federais. *Acesso a provas anteriores*. Disponível em : www.omif.com.br/estudo. Acesso em : 10/02/2024.

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. *Acesso a provas anteriores*. Disponível em : www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em : 10/02/2024.

Site Wikipédia. *Prefixo hiper*. Disponível em : https://pt.wikipedia.org/wiki/Hiperpot%C3%AAncia#:~:text=Uma%20hiperpot%C3%AAncia%20%C3%A9%20um%20estado,Unidos%20na%20d%C3%A9cada%20de%201990. Acesso em : 10/02/2024.