Teorema a partir da questão 9 da OMIF – 2022

Hiller Alves Fernandes
SEE – MG
hiller.fernandes@ufvjm.edu.br

Ivanildo Rocha Porto
Instituto Federal Baiano – Campus Teixeira de Freitas
ivanildo.porto@ifbaiano.edu.br

RESUMO: O trabalho aborda uma resolução alternativa da questão 9 da primeira fase da OMIF – 2022. A sua resolução traz indagações mais profundas. Por exemplo, todo número natural tem um múltiplo composto só por algarismos ? E se sim, existem infinitos múltiplos desse tipo?

Palavras-chave: Aritmética; Olimpíadas de Matemática; Resolução de Problemas.

ENUNCIADO

(Questão 9 – OMIF – 2022) Um professor de Matemática solicitou a um aluno que determinasse o menor número natural que ao ser multiplicado por 13, resultasse em outro número natural cujos algarismos são todos iguais a 5. O aluno realizou uma operação aritmética elementar e respondeu corretamente ao pedido do professor. Com relação ao menor número com as características solicitadas pelo professor, é correto afirmar que:

(a) é múltiplo de 7.

(b) é maior do que $43\,000$.

(c) é menor do que $42\,000$.

(d) é múltiplo de 17.

(e) a soma de seus algarismos é igual a 20.

RESOLUÇÃO:

A questão exibida pode ser encontrada em [1]. Note que, $13\times 76\,923=999\,999$.Dividindo ambos os lados da última igualdade por 9 temos $13\times 8\,547=111\,111$. No lado direito da equação basta dividir o $76\,923$ por 9, visto que, 13 e 9 são primos entre si. Por fim, multiplicando tudo por 5 temos $13\times 42\,735=555\,555$. De imediato podemos excluir as afirmativas (b) e (c), pois, $42\,000<42\,735<43\,000$. Além disso, o item (d) é falso porque $42\,735=17\times 2\,513+14$. Por outro lado, $42\,735=7\times 6\,105$, portanto, $42\,735$ é múltiplo de 7. Consequentemente, o item correto é a alternativa (a).

Esta resolução traz algumas perguntas. Como determinar o número $76\,923$? Como garantir que $555\,555$ é o menor múltiplo de 13 que é formado só por algarismos iguais a 5? A primeira pergunta é mais simples de responder. Já que

$$\frac{1}{13}=0{,}076923076923\ldots=0{,}\overline{076923}\Longleftrightarrow 13\times\frac{1}{13}=13\times 0{,}\overline{076923}\Longleftrightarrow 1=0{,}\overline{9}.$$

Uma igualdade estranha, porém, verdadeira. Portanto, o número $76\,923$ é obtido do período resultante da divisão de 1 por 13. A segunda pergunta pode ser sanada por uma simples inspeção.

Basta, dividir $55\,555, 5\,555, 555, 55$ e 5 por 13 e ver que o resto destas divisões não é igual a zero. Isso permite garantir que o número procurado é o $42\,735$. Obviamente, para generalizar tais resultados precisamos de uma análise mais profunda. Para a proposição vamos tomar como base o Teorema da Divisão Euclidiana que diz: Sejam a e b números naturais com $b\neq 0$ então existem dois únicos números naturais q e r tais que $a=b\cdot q+r$, onde $0\leq r<b$. Um resultado similar, porém, mais fraco pode ser encontrado em [2].

Teorema 1. Sejam $a,n,k\in N$ tais que $mdc(n,3)=mdc(n,2)=mdc(n,5)=1$, $\frac{1}{n}=0,\overline{k}$ e $a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Então o menor múltiplo de n composto apenas por algarismos iguais a a é dado por $n\times\frac{k}{9}\times a$. E este número tem j algarismos, onde j é p tamanho do período k.

Demonstração. O número k é da forma $k=a_1a_2\ldots a_j$ com $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ para todo i tal que $1\leq i\leq j$. Não importa se os i primeiros algarismos são iguais a zero porque j representa o tamanho do período resultante da divisão de 1 por n. Em outras palavras, podemos ter $a_1=a_2=\ldots=a_i=0$, desde que, $i<j$. Então, $n\times\frac{k}{9}\times a=a\left(\frac{10^j-1}{9}\right)=aa\ldots a$ com j algarismos iguais a a. Observe que, $10^j\div n=k,\overline{k}$, portanto, 10^j deixa resto 1 na divisão por n.

De fato, o algoritmo usual da divisão fornece até j restos, todos únicos pelo Teorema da Divisão Euclidiana. Suponha, por absurdo, que existe um $p<k$ tal que $n\times\frac{k}{9}\times a=a\left(\frac{10^s-1}{9}\right)=aa\ldots a$ com s algarismos iguais a a. Então, $10^s\div n=p,\overline{p}$, portanto, 10^s deixa resto 1 na divisão por n. Então, vai existir um resto $r_i=1$, $r_i=r\in N$, $r\neq 1$ e $i\leq s$. Absurdo, pois pelo Teorema da Divisão Euclidiana r_s é único. ∎

A demonstração diz basicamente que 10^s deixa restos distintos quando efetuamos $10^j \div n$ e $10^s \div n$. No algoritmo da divisão podemos destacar os s primeiros zeros de 10^j da esquerda para a direita e efetuar a divisão.

$$\begin{array}{r|l} 1000\ldots00'\ldots00 & \quad n \\ \cline{2-2} r_i & a_1 a_2 \ldots \end{array}$$

Sabe-se que neste caso $r_i \neq 1$, caso contrário, não teríamos um período igual a k na divisão de $1/n$. Mas nossa suposição dizia que 10^s deixa resto 1 na divisão por n.

Os números reais podem ter duas representações no sistema decimal. Por exemplo, $1=0,\bar{9}$, $0,3=0,2\bar{9}$ e $0,201=0,200\bar{9}$. Para evitar essa ambiguidade foi preciso trazer o problema de volta para os números naturais. O Teorema mostra que todo número primo com 2 e 5 tem infinitos múltiplos do tipo $aa\ldots aa$ com $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. De fato, pois podemos concatenar quantos períodos quisermos. Por exemplo, $13 \times 76\,923\,076\,923 = 999\,999\,999\,999\,999\,999$. Só dividir o resultado por 9 e multiplicar por a.

Quando n é múltiplo de 3 temos que tomar cuidado ao dividir $k \times n$ por 9. Isso é fácil contornar, basta tomar a concatenação de 9 períodos. Uma vez que, um número é múltiplo de 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos é múltiplo de 9. É fundamental que $mdc(n,2)=1$. Caso contrário, não é possível ter um múltiplo só com algarismos ímpares. Por outro lado, se $mdc(n,5) \neq 1$, necessariamente a única possibilidade, quando houver, para a é ser igual a cinco.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Simples problemas de Olimpíadas de Matemática podem despertar a curiosidade para questões mais profundas e acessíveis por métodos elementares. Neste trabalho mostramos que existem infinitos múltiplo de n com apenas algarismos iguais a a quando $mdc(n,2)=mdc(n,5)=1$ e $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

REFERÊNCIAS

[1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - **Teoria dos Números um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**, Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[2] Prova da OMIF 2022 (primeira fase). Disponível em: https://omif.com.br/estudo. Acessado em: 20/07/2023.