A importância de permutação com repetição na resolução de problemas de análise combinatória: uma abordagem por questões da OMIF

Diego Dutra Zontini
Instituto Federal do Paraná - Campus Irati
diego.zontini@ifpr.edu.br

João Paulo Garcia
Instituto Federal do Paraná - Campus Irati
joao.garcia.ifpr@gmail.com

RESUMO: Neste artigo, analisamos várias formas de resolução do item c) da questão 3 da segunda fase da OMIF 2022. A partir delas, discutimos a importância de trabalhar extensivamente com permutações com repetição no ensino médio, mostrando que elas permitem resolver rapidamente e sem o uso exagerado de fórmulas uma grande gama de problemas de combinatória.
Palavras-chave: Permutação com repetição; Análise combinatória; Princípio Fundamental da Contagem.

ENUNCIADO

(Questao 03 - item c - OMIF - 2ª fase- 2022).

Ana e Bia devem entregar um único relatório para uma disciplina da escola e precisam decidir quem será a responsável por passá-lo a limpo. Para isso, resolvem usar uma caixa que seu professor de matemática havia deixado na sala para explicar probabilidade à turma. Dentro da caixa, há exatamente 3 bolas azuis, 4 bolas brancas e 4 bolas cinzas, todas idênticas, exceto pela cor. Elas combinam o seguinte: Ana deve retirar, ao mesmo tempo, duas bolas desta caixa de maneira aleatória e verificar as suas cores. Se ambas tiverem a mesma cor, então Ana deve passar o relatório a limpo. Caso contrário, ela deve devolver as bolas à caixa e Bia deverá realizar o mesmo procedimento. Elas vão se alternando nas retiradas e a primeira que obtiver duas bolas com a mesma cor será a responsável por passar o relatório a limpo.

a) Qual é a probabilidade de Ana obter duas bolas de mesma cor já na sua primeira retirada?

b) Qual é a probabilidade de Bia ter que passar o relatório a limpo?

c) Após ficar decidido quem irá passar o relatório a limpo, Ana e Bia decidem dispor todas as 11 bolas em linha reta de modo que não existam duas bolas brancas adjacentes. Quantas disposições diferentes respeitam esta condição?

RESOLUÇÃO

Nosso foco está no item c, o qual pode ser explorado de diversas formas, vejamos algumas possíveis soluções diferentes da solução da prova apresentada em [10]:

Solução alternativa 1:

Para evitar que tenhamos duas bolas brancas adjacentes, vamos criar blocos de duas bolas, com a primeira bola sendo branca e segunda não branca (azul ou cinza). Desta forma não é possível que duas bolas brancas fiquem adjacentes. Surge uma primeira pergunta, toda solução pode ser escrita usando tais blocos? Infelizmente não, porém, todos os casos em que a última bola não é branca podem ser descritos da forma acima usando quatro blocos. Nos demais casos, quando a última bola é branca, podemos proceder da mesma forma, formando agora três blocos, pois uma bola branca estará fixada na última posição. Sendo assim, vamos separar em dois casos: o primeiro é quando a última bola não é branca; o segundo, quando a última bola é branca.

Para facilitar a visualização, denotaremos uma bola azul por um círculo com a letra A, uma bola branca por um círculo com a letra B, uma bola cinza por um círculo com a letra C e um bloco de duas bolas por um círculo com as letras de suas respectivas cores:

A B C BA BC

No primeiro caso, quando a última bola não é branca, temos quatro sub-casos possíveis, os quais são desenhados a seguir:

sub-caso 1: BC BC BC BC A A A

sub-caso 2: BC BC BC BA C A A

sub-caso 3: BC BC BA BA C C A

sub-caso 4: BC BA BA BA C C C

A quantidade de configurações possíveis em cada sub-caso pode ser calculada utilizando uma permutação com repetição, sendo elas, respectivamente:

$$\begin{aligned} P_7^{4,3} &= \frac{7!}{4!\ 3!} = 35; \\ P_7^{3,2} &= \frac{7!}{3!\ 2!} = 420; \\ P_7^{2,2,2} &= \frac{7!}{2!\ 2!\ 2!} = 630; \\ P_7^{3,3} &= \frac{7!}{4!\ 3!} = 140. \end{aligned}$$

Analisando o segundo caso, no qual a última bola é uma bola branca fixada, restam dez bolas para serem posicionadas, sendo que destas dez temos três bolas brancas, portanto necessitamos montar três blocos. Neste segundo caso também teremos quatro sub-casos possíveis, os quais são desenhados a seguir:

sub-caso 1: BC BC BC C A A A

sub-caso 2: BC BC BA C C A A

sub-caso 3: BC BA BA C C C A

sub-caso 4: BA BA BA C C C C

As quantidades de configurações possíveis em cada sub-caso são, respectivamente:

$$\begin{aligned} P_7^{3,3} &= \frac{7!}{3!\ 3!} = 140; \\ P_7^{2,2,2} &= \frac{7!}{2!\ 2!\ 2!} = 630; \\ P_7^{2,3} &= \frac{7!}{2!\ 3!} = 420; \\ P_7^{3,4} &= \frac{7!}{3!\ 4!} = 35. \end{aligned}$$

A quantidade de possibilidades totais é a soma dos dois casos, ou ainda, a soma dos oito sub-casos:

$$(35 + 420 + 630 + 140) + (140 + 630 + 420 + 35) = 2450.$$

Solução alternativa 2:

Para evitar que tenhamos duas bolas brancas consecutivas, vamos posicionar primeiramente as bolas não brancas (azuis ou cinzas), mantendo um espaço inicial, um espaço final e um espaço entre bolas consecutivas quaisquer, por exemplo:

___ A ___ A ___ A ___ C ___ C ___ C ___ C ___

A configuração anterior pode ser feita de várias formas diferentes, tal quantidade pode ser calculada por uma permutação com repetição:

$$P_7^{3,4} = \frac{7!}{3!\ 4!} = 35.$$

Agora devemos posicionar as bolas brancas, colocando no máximo uma bola branca em cada espaço, isso pode ser feito atribuindo ”sim” ou ”não” em cada espaço, sendo que ”sim” significa que colocaremos uma bola branca e ”não” significa que não será colocada uma bola branca. Assim, abreviando as palavras sim e não pelas letras ”s” e ”n”, temos oito espaços para inserir quatro ”s” e quatro ”n”, tal problema é análogo à análise de quantidade de anagramas na palavra ”ssssnnnn”, que pode ser calculada por uma permutação com repetição:

$$P_8^{4,4} = \frac{8!}{4!\ 4!} = 70.$$

Como cada configuração das bolas não brancas permite todas as possíveis configurações das bolas brancas, temos um total de $35 \times 70 = 2450$ casos.

Solução alternativa 3:

Primeiramente vamos posicionar as bolas brancas, considerando espaços antes da primeira bola, entre duas bolas consecutivas e após a última bola branca:

___ B ___ B ___ B ___ B ___

Agora, basta colocarmos as demais bolas nos espaços, com a obrigação de colocar pelo menos uma bola nos espaços entre duas bolas brancas. Tal problema é equivalente à análise de quantidade de soluções da Equação Diofantina:

$$a + b + c + d + e = 7, \tag{1}$$

com $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$, $b \geq 1$, $c \geq 1$ e $d \geq 1$. Aqui estamos considerando a a quantidade de bolas no primeiro espaço à esquerda, b no segundo espaço e assim por diante.

Para eliminar as restrições sobre as variáveis b, c e d, podemos fazer mudanças de variáveis. Considere as novas variáveis:

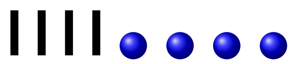
$$\begin{aligned}\overline{b} &= b-1;\\ \overline{c} &= c-1;\\ \overline{d} &= d-1.\end{aligned}$$

Substituindo na equação (1), obtemos

$$\begin{aligned}a+\overline{b}+1+\overline{c}+1+\overline{d}+1+e &= 7\\ a+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}+e &= 4, \qquad (2)\end{aligned}$$

com $a,\overline{b},\overline{c},\overline{d},e \in \mathbb{N}$.

Para analisar a quantidade de soluções da equação (2), podemos fazer uso de uma permutação com repetição. Para isto, podemos ver a equação como um problema de bolas e traços [6]. Considerando quatro traços, um para cada sinal $+$, e quatro bolas, referente ao valor 4 à direita do igual. Temos que a quantidade de soluções é a mesma que a quantidade de permutações dos objetos:



dada pela permutação com repetição

$$P_8^{4,4} = \frac{8}{4!\ 4!} = 70.$$

Por fim, como as bolas não brancas não são todas iguais, para cada uma das 70 configurações possíveis, podemos permutar as bolas não brancas entre si, podendo fazer isto de $P_7^{3,4} = 35$ maneiras diferentes. Portanto, o total de possibilidades é

$$70 \times 35 = 2450.$$

Solução alternativa 4:

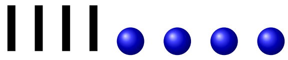
Primeiramente vamos posicionar as bolas brancas, considerando espaços antes da primeira bola, entre duas bolas consecutivas e após a última bola branca:

________ B ________ B ________ B ________ B ________

Agora, vamos colocar três bolas não brancas, uma em cada espaço entre duas bolas brancas. Denotaremos as bolas não brancas pela letra N, independente de sua cor.

B N B N B N B

Então, basta posicionar as outras quatro bolas não brancas nos cinco espaços, agora não temos mais restrições, portanto, é equivalente à um problema de bolas e traços possuindo 4 traços, referente às quatro bolas brancas, e quatro bolas, referentes às quatro bolas não brancas restantes.



Isto pode ser feito de $P_8^{4,4} = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$ maneiras. Por fim, para cada uma das 70 maneiras, podemos permutar as bolas não brancas entre si, o que pode ser feito de $P_7^{3,4} = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$ maneiras, gerando um total de $70 \times 35 = 2450$ disposições diferentes.

Em cada uma das soluções alternativas apresentadas, utilizamos permutação com repetição. Como sugerido por Morgado et. al. em [8], as fórmulas de arranjo e combinação são meras aplicações de permutações. Sendo assim, compactuamos com Mendes [7] que o uso de permutações para resolver problemas de análise combinatória é um caminho alternativo e confirmativo.

Comumente, percebemos nos livros didáticos um enfoque maior para os casos de permutação simples, arranjo simples e combinação simples, como podemos notar em [3]. Neste caso, é incentivado a dedução e uso de fórmulas para estes três casos.

O uso de fórmulas para resolver exercícios de análise combinatória, em detrimento ao princípio fundamental da contagem, tem sido estudado por diversos autores [1, 2, 4, 5] e se mostrado ineficaz. Sendo assim, incentivamos utilizar permutação na resolução de qualquer exercício de análise combinatória, a qual é facilmente compreendida por estudantes a partir do princípio fundamental da contagem.

Obviamente que problemas mais complexos de analise combinatória podem ser facilitados com o uso de fórmulas. Porém, sem uma boa base em relação ao princípio fundamental da contagem e o princípio aditivo, o estudante se quer consegue propor estratégias para resolver tais problemas. Infelizmente, apesar de avanços nos livros didáticos em relação ao emprego do Princípio Fundamental da Contagem na resolução de problemas, em geral, o mesmo é apenas empregado na introdução do capítulo [11].

Em problemas onde repetições devem ser consideradas, a dificuldade é aumentada e é necessário que os estudantes estejam cientes que isto pode ocasionar na necessidade de mudanças de estratégia de resolução [12]. De acordo com Araújo e Rocha [2], os estudantes apresentam dificuldades em problemas de análise combinatória envolvendo os invariantes de ordem e repetição. Além disso, casos de permutação com repetição, que consideramos a porta de entrada para os problemas envolvendo repetições, comumente são pouco trabalhados. Em [3], tal assunto é abordado após os casos de arranjo e combinação simples, sendo dedicada meia página para o assunto.

A questão da OMIF considerada neste artigo, mostra a importância de trabalhar bem permutações com repetição em análise combinatória, o que pode ser feito antes mesmo de se dedicar à problemas de arranjo e combinação, os quais podem ser vistos como casos particulares de permutação. Mesmo em casos de combinação simples, permutação com repetição pode ser uma alternativa para evitar o uso da fórmula de combinação, como sugerido na solução alternativa 2.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos formas pouco abordadas em livros didáticos e em contextos escolares de lidar com combinações e arranjos, destacando o uso de permutação com repetição para resolução dos mais variados problemas. Na análise do item c) desta questão da OMIF, percebemos que um problema combinatório pode ser simplificado com o uso de conhecimentos básicos de permutação com repetição. Além disso, percebemos que parte da dificuldade enfrentada pelos estudantes surge da utilização de fórmulas, assim, reforçamos que as fórmulas mais complexas se tornam desnecessárias e substituíveis por ideias simples envolvendo conceitos de permutação com repetição. Esta questão enfatiza o potencial das questões da OMIF para aprofundar a discussão em sala de aula, tanto nos diferentes pontos de vista para resolução de uma mesma questão, quanto na necessidade de enfoque em conteúdos importantes, possibilitando um momento de construção conjunta, entre docente e discentes, de novos conhecimentos matemáticos.

Referências

[1] ARAUJO, Niwlandes. *Uma reflexão quanto ao uso de fórmulas na Análise Combinatória.* TCC (Especialização em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba. Cajazeiras, p. 36. 2019.

[2] ARAÚJO, Karolina; ROCHA, Cristiane. *Como alunos do Ensino Médio Compreendem os Invariantes Prescritivos de Ordem e Repetição em Problemas de Arranjo e Combinação.* Rev. Ens. Educ. Human. v. 19, n. 2, p. 142-150, 2018.

[3] CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. *Quadrante - Matemática - 2.* São Paulo. 2016.

[4] CONCEIÇÃO, Dérick; PEREIRA, Ducival; SANTOS, Maria. *O ensino-aprendizagem de Análise Combinatória: o desempenho de alunos de Belém do Pará.* In: Encontro Nacional de Educação Matemática. XII. São Paulo. 2016.

[5] DIAS, Reinaldo; FREITAS, Adriano; VICTER, Eline. *Noções de Análise Combinatória na Educação Básica: atividades interdisciplinares*. Educ. Matem. Debate. v.1, n. 3, p. 296-313, 2017.

[6] FELLER, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. 3. ed. Nova York: John Wiley & Sons, Inc. 1976.

[7] MENDES, Daniel. *A Abrangência das Permutações na Análise Combinatória*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Brasília. Brasília, p. 67. 2014.

[8] MORGADO, Augusto. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

[9] GUERRA, Fernanda. *15º PIC OBMEP - Lista de exercícios – Análise Combinatória*. https://https://pt-static.z-dn.net/files/dad/f37aa3cbdd5cdd5f7d08b549226f5f08.pdf acesso em 12/08/2023.

[10] Prova OMIF 2022. https://omif.com.br/images/pdf/resolucao_comentada_da_prova_2_fase_omif_2022.pdf acesso em 10/08/2023.

[11] ROCHA, Cristiane; LIMA, Ana; BORBA, Rute. *Conhecimentos de professores para ensinar combinatória: contribuições de pesquisas*. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. VI. Pirenópolis. 2015.

[12] SILVA, José; ROCHA, Cristiane. *O Invariante da repetição nos problemas combinatórios em livros didáticos do Ensino Fundamental*. In: Encontro de iniciação à docência da UEPB. V. Campina Grande V. 2015.